

Министерство образования Ярославской области

Государственное образовательное учреждение
дополнительного образования Ярославской области
«Ярославский региональный инновационно-образовательный центр «Новая школа»

Принята на заседании
Педагогического совета
ГООУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа»
от «27» июня 202 5 года
Протокол № 01

Утверждаю
Директор
ГООУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа»
И.С. Леонова
«01» июля 202 5 года



Дополнительная общеразвивающая программа

«СТРАТЕГИИ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ»

Направленность: естественно-научная

Возраст обучающихся: 11 – 14 лет

Срок реализации: 4 года

Автор – составитель:
Каленова Анастасия Андреевна,
педагог дополнительного образования
ГООУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа»

г. Ярославль, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ 1. КОМПЛЕКС ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОБЩЕРАЗВИВАЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ	3
1.1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
1.1.1. Актуальность и значимость программы.....	3
1.1.2. Основные идеи, подходы, принципы	4
1.1.3. Целевая аудитория программы	5
1.1.4. Срок, объем и форма освоения программы.....	6
1.1.5. Режим занятий, периодичность и продолжительность.....	6
1.1.6. Особенности организации образовательного процесса	6
1.2. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ПРОГРАММЫ	9
1.3. ВОСПИТАНИЕ	10
1.3.1. Цель, задачи, целевые ориентиры воспитания детей.....	10
1.3.2. Формы и методы воспитания	12
1.3.3. Условия воспитания, анализ результатов	12
1.3.4. Календарный план воспитательной работы	13
1.4. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ.....	15
1.4.1. Учебно-тематический план.....	15
1.4.2. Календарный учебный график	23
1.4.3. Содержание учебного плана.....	24
1.5. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	33
РАЗДЕЛ 2. КОМПЛЕКС ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ	37
2.1. КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК	37
2.2. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ	37
2.3. ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ	37
2.4. МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ.....	43
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	46
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	49
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	51
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	64
ПРИЛОЖЕНИЕ 4	97
ПРИЛОЖЕНИЕ 5	101
ПРИЛОЖЕНИЕ 6	105

РАЗДЕЛ 1. Комплекс основных характеристик дополнительной общеразвивающей программы

1.1. Пояснительная записка

1.1.1. Актуальность и значимость программы

Математика является значительной и важной частью общечеловеческой культуры, так как имеет богатейшие возможности воздействия на выработку научного мировоззрения для достижения необходимого общекультурного уровня. В современном мире, где развитие компьютерных технологий и искусственного интеллекта стремительно развивается, существует запрос на владение углубленными (иногда уникальными) знаниями в предметной области, нестандартное мышление и творческий подход к решению сложных задач в совокупности с умением емко и логично строить утверждения. Логические рассуждения представляют собой один из методов математики, поэтому её изучение формирует логическое мышление, позволяет правильно устанавливать причинно-следственные связи, что, безусловно, должен уметь каждый человек.

Актуальность дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» обусловлена во-первых, государственным заказом, который ориентирован на решение задач Концепции развития математического образования (Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 N 2506-р «Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации» (в редакции Распоряжения Правительства Российской Федерации от 08.10.2020 № 2604-р), направленных на математическое просвещение и популяризацию математики, обеспечение обучающимся, имеющим высокую мотивацию и проявляющим математические способности, всех условий для развития и применения этих способностей.

Во-вторых, социальным заказом. На сегодняшний день у детей и их родителей все больше возрастает интерес к углубленному изучению математики, к олимпиадному движению, поэтому многие стараются как можно раньше включиться в этот процесс, не упустив время. На основании результатов исследований, проведенных Центром педагогического мастерства и школой математики «Декарт», было установлено, что 78% учащихся 5–11 классов участвуют в математических состязаниях хотя бы раз в год (исследование Центра педагогического мастерства, 2026 г.), спрос на математическое образование растет с каждым годом, не только со стороны самих обучающихся, но и со стороны родителей - математическое развитие детей важным считают 86,9% родителей, большинство из них ищут не просто образовательную организацию, а программу, которая будет учить ребёнка рассуждать, сравнивать, делать выводы (исследование школы математики «Декарт», 2025 г.).

В-третьих, востребованностью дополнительных общеразвивающих программ естественно-научной направленности (математика) ГОУ ДО ЯО

ЯРИОЦ «Новая школа» со стороны детей и родителей. На основании статистических исследований, проведенных за период 2024 - 2026 года, количество заявлений на обучение по программам естественно-научной направленности (математика) в ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа» увеличилось на 12,5%, а доля детей, занимающихся в математических образовательных объединениях, в среднем составляет 31,2% от общего числа всех обучающихся центра «Новая школа».

В системе дополнительного образования стало возможным изучение математики, ориентированной на решение нестандартных задач, выходящих за рамки школьной программы для учащихся средней школы, интересующихся этой наукой, и стремящихся проявить себя не только в учебе, но и на математических соревнованиях регионального и федерального уровней.

Дополнительная общеразвивающая программа «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» позволяет обучающимся познакомиться с новыми интересными разделами математики, ориентирует на решение задач повышенной сложности и применение нестандартных подходов на практике, отказываясь от шаблонного мышления и работы по заранее известному алгоритму. Ежегодно по данной программе обучается около 100 детей в 6 учебных группах.

Педагогическая целесообразность и практическая значимость программы обусловлены следующими ее характеристиками:

- содержание программы включает новые области знаний, расширяющие кругозор обучающихся и дающие представления о системе естественно-научных знаний и об основных принципах научности;
- программа ориентирована в большей степени не на алгоритмичность работы с математическими структурами и повторяющееся выполнение математических операций, чтобы отработать навык, а на творческий подход к решению задач и формированию у обучающегося личного опыта применения различных методов, идей, принципов и подходов к решению математических задач;
- программа способствует развитию интеллектуального потенциала детей, удовлетворяет познавательный интерес и индивидуальные образовательные запросы, стимулирует инициативу и самостоятельность обучающихся.

1.1.2. Основные идеи, подходы, принципы

Дополнительная общеразвивающая программа «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является модифицированной, разработана на основе дополнительной общеразвивающей программы «Методы решения олимпиадных задач по математике», (автор - Богомолов Юрий Викторович, доцент кафедры дискретного анализа ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова, к.ф.-м.н.).

Некоторые разделы программы, такие как: «Геометрия», «Теория чисел» дополняют основную общеобразовательную программу по математике и способствуют улучшению знаний обучающихся в данных областях путем изучения новых математических фактов и рассмотрения нестандартных

методов решения задач на учебных занятиях. Однако основная часть программы нацелена на изучение тех областей математики, которые в школьной программе не рассматриваются: «Комбинаторика», «Теория игр», «Математическая логика» и другие. Тем самым детям предоставляется возможность подготовиться к выступлениям на олимпиадах различного уровня, расширить кругозор в области математики, научиться использовать нестандартные подходы при решении задач.

Новизна программы находит свое отражение в методике проведения занятий, отличающейся от традиционной методики школьного образования, при этом основное внимание уделяется решению задач повышенного уровня сложности, игровых задач на смекалку, задач математических олимпиад прошлых лет, которые систематически обновляются и дополняются заданиями новых олимпиад.

На программу получена рецензия от доцента кафедры вычислительных и программных систем ЯрГУ им. П.Г. Демидова, члена жюри и методкомиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике и по информатике, кандидата технических наук Волченкова Сергея Геннадьевича (Приложение 1).

Принципы программы:

- *принцип научности* (Знания, которые сообщает педагог и которыми овладевают обучающиеся на любой ступени обучения, должны быть научными, основанными на проверенных наукой и практикой положениях.);
- *принцип систематичности и последовательности* (Обучающиеся должны овладевать научными умениями и навыками в строго определенном порядке. Последовательность предполагает логическую обоснованность изучения последующих разделов за предыдущими. Программа строится от частных примеров (особенности решения отдельных примеров) к общим (решение математических задач);
- *принципы сознательности и активности* (Сознательность обучения предполагает понимание обучающимися смысла усваиваемых знаний, умений и навыков, отчетливое представление ими целей и значений учебной деятельности. Активность проявляется в инициативности и высокой степени самостоятельности учащихся);
- *принцип наглядности* (Этот принцип исходит из единства чувственного и логического. Наглядность обеспечивает связь между конкретным и абстрактным, помогает достижению прочности знаний, осуществлению связи теории с практикой, доступность обучения и т.д.);
- *принцип связи обучения с жизнью* (Он предполагает показ практического и общественного значения изучаемого материала).

1.1.3. Целевая аудитория программы

Программа ориентирована на интересующихся математикой обучающихся 11 – 14 лет (5 – 8 классов) общеобразовательных учреждений г. о. г. Ярославля и Ярославской области.

Реализация программы предполагает наличие у детей хорошего уровня начальной математической подготовки в объеме программы

общеобразовательной школы для соответствующего возраста обучающихся, а также умения логически рассуждать.

Важное значение для эффективного обучения имеет интерес самого ребенка (а не только его родителей) к изучению математики.

1.1.4. Срок, объем и форма освоения программы

Дополнительная общеразвивающая программа «Стратегии решения олимпиадных математических задач» реализуется в течение 4 лет.

Общий учебно-тематический объем программы составляет 288 часов, из них:

Год обучения	Количество часов	Из них	
		Теоретические	Практические
Первый (5 класс)	72	20	52
Второй (6 класс)	72	17	55
Третий (7 класс)	72	20	52
Четвертый (8 класс)	72	19	53
Всего:	288	76	212

Форма обучения: очная

1.1.5. Режим занятий, периодичность и продолжительность

Учебная нагрузка определяется с учетом возраста детей и года обучения. В соответствии с Постановлением Главного государственного санитарного врача РФ от 28.09.2020 № 28 «Об утверждении санитарных правил СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи» устанавливается периодичность занятий и общее количество часов в неделю и за год.

Количество часов в неделю: 2 часа;

Периодичность занятий: 1 раз в неделю;

Занятия проводятся 1 раз в неделю по 2 академических часа (по 45 минут) и обязательным 10 минутным перерывом между занятиями.

1.1.6. Особенности организации образовательного процесса

Учебные занятия проводятся по группам.

Формирование групп проводится по возрасту (классу) с учетом предполагаемого уровня освоения дополнительных общеразвивающих программ естественно-научной направленности, реализуемых в образовательных объединениях ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа» и других образовательных организациях Ярославской области, а также принимается во внимание опыт и результативность участия в математических соревнованиях. Это позволяет учитывать в работе как возрастные особенности развития математических представлений у обучающихся, так и содержательную базу,

сформированную к этому времени в курсе математики общеобразовательной школы.

Количественный состав групп: 15 - 17 человек.

Состав группы обучающихся – постоянный.

Данная программа позволяет обучающимся познакомиться со многими интересными вопросами математики, выходящими за рамки школьной программы, новыми идеями и методами решения математических задач, расширить целостное представление о проблеме данной науки.

Содержание программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» представляет собой единую систему взаимосвязанных тем, которые постепенно усложняются от одного года обучения к другому. Освоение материала происходит по «восходящей спирали», т.е. периодическое возвращение к темам на более высоком и сложном уровне. Задания, предлагаемые обучающимся, соответствуют их возрасту и уровню подготовки.

Для детей 11 лет обучение по данной программе – это отличная возможность окунуться в мир математики и понять насколько он ему интересен. Одной из основных форм проведения занятий на первом году обучения – игры и соревнования. Акцент ставится на развитие у обучающихся умения самостоятельного поиска решения нестандартных задач. Игровая форма важна для детей, которые только что закончили начальную школу, так как резкий переход к строгому изучению математики может «спугнуть» интерес детей. Соревновательный дух на занятиях является ключевым элементом к развитию мотивации и удержанию внимания обучающихся. На занятиях отсутствует тренинг по решению однотипных задач. Главное в организации и проведении занятий – научить детей решать задачи совершенно разного типа, непохожие одна на другую, развивая гибкость мышления, смотреть на проблему с разных сторон.

Начиная со второго года обучения на занятиях происходит плавный переход к осознанию обучающимися, что математика – это не игра, а наука, где есть трудности и «подводные камни», где необходимы внимательность, усердие, точность, строгость доказательств и труд. На этом этапе происходит подготовка к дальнейшей научно-исследовательской деятельности, прививаются навыки исследовательской работы и научной дискуссии.

Учебные занятия включают в себя теоретическую и практическую части, которые могут попеременно чередоваться друг с другом.

Теоретическая часть занятия предполагает обсуждение заданной темы, где педагог задает направление, а обучающиеся являются не пассивными слушателями, а активными участниками процесса. Такой подход дает возможность совместной работе педагога с обучающимися, помогает развивать у них навык самостоятельного поиска ответа, вывода формул и формирование понятийного аппарата.

Практическая часть занятия по программе на первом году обучения в основном состоит из игр (командных соревнований), в последующих – из индивидуальных решений задач по теме с дальнейшим их обсуждением и консультацией. Также практическая составляющая обогащена активными

формами обучения, участием детей в разнообразных личных и командных математических соревнованиях, имитирующих научно-исследовательскую деятельность и прививающих умения и навыки, свойственные будущей научной работе.

Содержание программы реализуется в очной форме, а также возможно применение дистанционных образовательных технологий и электронного обучения. В мессенджере ВКонтакте, где педагог размещает дополнительно файлы, содержащие материалы занятий и презентации (для тех, кто отсутствовал на занятии по уважительной причине), также данная среда является инструментом для общения с группой, распространения информации о предстоящих олимпиадах и других интеллектуальных мероприятиях.

1.2. Цель и задачи программы

Цель: Развитие у обучающихся устойчивого познавательного интереса к углубленному изучению математики в процессе решения нестандартных математических задач.

Задачи:

Личностные:

- формировать у обучающихся устойчивый интерес к математике, представление о математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для общественного прогресса;
- развивать у обучающихся способность глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- способствовать проявлению любознательности, сообразительности при выполнении разнообразных заданий;
- развивать навыки работы в команде, проявлять лидерские качества.

Метапредметные:

- развивать способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные:

- способствовать овладению конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности;
- способствовать овладению специальной математической терминологией, совершенствовать математическую речь;
- развивать нестандартное мышление и творческий подход к поиску решения задач;
- развивать навыки решения нестандартных задач и задач повышенной сложности;
- развивать умение переводить различные задачи на язык математики.

1.3. Воспитание

1.3.1. Цель, задачи, целевые ориентиры воспитания детей

В настоящее время воспитание подрастающего поколения – это национальная цель, которая является одним из ключевых приоритетов государственной политики и детализируется в стратегических и программных документах развития образования.

Одна из национальных целей звучит так: «Реализация потенциала каждого человека, развитие его талантов, воспитание патриотичной и социально ответственной личности» (Указ Президента Российской Федерации от 07.05.2024 № 309 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года и на перспективу до 2036 года»). Целевая установка развития дополнительного образования «Создание условий для самореализации и развития талантов детей, воспитание высоконравственной, гармонично развитой и социально ответственной личности» (Распоряжение Правительства РФ от 31.03.2022 № 678-р «Концепция развития дополнительного образования детей до 2030») практически полностью созвучна национальной цели развития Российской Федерации, так как дополнительное образование обладает существенным воспитательным потенциалом и благоприятными условиями для поддержки творческих устремлений детей в самопознании, самоопределении, самореализации и самоутверждении.

Данная программа разработана с учетом государственного запроса на развитие воспитания в системе образования, а также удовлетворения потребности ребенка в его личностном развитии.

Задачи воспитания:

1. *Оказание помощи обучающимся в осознании целей, ценностей и перспектив саморазвития.*

Существует два подхода реализации задачи:

— Обучающийся, который уже заинтересован математикой и пришел на занятия целенаправленно. В этом случае он попадает в среду, где педагог может помочь получить более расширенные знания, поделиться опытом и дать направление для дальнейшего развития в этой области.

— Обучающийся, который пока еще не определился в какой области ему интереснее было бы развиваться. В таком случае, задача педагога показать ребенку красоту предмета, заинтересовать деятельностью. Если в обучающемся это находит отклик, то важно помочь ему в осознании своих собственных целей и интересов, помочь понять в какой сфере деятельности ему могут пригодиться математические знания.

2. *Создание условий для построения социальных отношений обучающихся.*

Занятия по данной дополнительной программе помогают обучающемуся ответить на следующие вопросы: «С кем быть?», «Как строить свои отношения с людьми?» и предоставляют возможность приобретения нового для него социального опыта, возможность попасть в среду, где есть группа

единомышленников, готовых разговаривать на интересующую тему. Для решения данной задачи в программе предусмотрены командные игры, викторины и математические соревнования, а также занятия-семинары, на которых обучающиеся совместно друг с другом обсуждают решение задач, исследуя какое-либо новое для них свойство математических объектов или доказательство новой для них математической теоремы.

3. Актуализация интереса обучающихся к нормам общественной жизни и традициям своей культуры.

Для решения этой задачи на занятиях уделяется внимание не только обсуждаемому математическому факту, но и дается историческая справка. Обучающиеся узнают о жизни известных математиков, в том числе тех, кто внес научный вклад в развитие и становление образования в нашей стране. Например, при изучении темы «Теория графов», можно дополнительно рассказать про Леонарда Эйлера, который работал в Российской империи и сделал огромный вклад в становление науки. Также, 1 декабря в России отмечается День математика, который приурочен ко Дню рождения всемирно известного русского ученого, выдающегося математика, одного из первооткрывателей неевклидовой геометрии – Николая Ивановича Лобачевского, поэтому начало занятия обычно посвящается биографии ученого, так как часто обучающиеся даже не знакомы с такой фамилией.

Целевые ориентиры воспитания детей в рамках реализации программы направлены на:

- формирование представлений о математике как части человеческой культуры, понимание значимости математики для общественного прогресса;
- развитие познавательного интереса к личностям российских и зарубежных ученых-математиков, уважения к их научным достижениям;
- формирование ориентации на взаимную помощь и поддержку, уважительное отношение к друг другу и окружающим;
- развитие навыков командного взаимодействия;
- создание условий для самоопределения и саморазвития обучающихся.

Индивидуальная воспитательная работа с обучающимися по программе включает в себя:

- изучение особенностей личностного развития обучающихся через наблюдение за его поведением, отношением к занятиям математикой, взаимодействием и коммуникацией с другими обучающимися в процессе выполнения командных или индивидуальных заданий, в организуемых педагогом беседах по тем или иным нравственно-этическим темам или событиям, участником которых стал ребенок;
- поддержку ребенка в решении важных для него жизненных проблем (налаживание взаимоотношений с другими детьми, личный и социальный опыт в конкретных видах и направлениях деятельности, в том числе в рамках программного содержания);
- коррекцию поведения ребенка через индивидуальные беседы с ним, его родителями (законными представителями), с другими членами детского коллектива.

1.3.2. Формы и методы воспитания

Решение задач создания и поддержки воспитывающей среды общения и успешной деятельности, формирования межличностных отношений на основе российских традиционных духовных ценностей осуществляется на каждом учебном занятии.

Программой предусмотрены разные формы проведения занятий. Командные игры помогают развивать социальные качества и умение управлять своими эмоциями. Так же в программу включены занятия-беседы, на которых ребята знакомятся с биографиями математиков и математическими открытиями. Изучение биографий русских ученых математиков помогает оценить их вклад в развитие науки в России и за ее пределами.

В воспитательной деятельности с обучающимися по программе используются следующие методы: метод убеждения (рассказ, объяснение, и.др.), метод положительного примера (педагога и других взрослых, детей), метод педагогического требования (в рамках установленных правил организации образовательного процесса), метод стимулирования и поощрения (индивидуального и публичного), методы развития самоконтроля и самооценки обучающихся, методы группового взаимодействия.

Индивидуальное решение нестандартных математических задач воспитывает волевые качества ребенка: вдумчивость, настойчивость, целеустремленность, умение принимать ошибки и неудачи как часть процесса развития человека.

Метод обучения через решение нестандартных математических задач подразумевает также эстетическое воспитание и развитие творческих способностей учащихся. На занятиях приветствуется поиск красивого и нестандартного решения. Дети могут решать задачи в таком темпе, какой для них удобен. Часть ребят любят зарисовывать условия, тем самым быстрее находя решение. Так воспитывается творческий поиск и воображение, креативность. Но вместе с тем, ребята знают, что важно решение записать так, чтобы оно было понятно другому человеку и сформулировано четко и последовательно. Красивое решение задачи - одновременно наглядно, неожиданно просто и изящно. Оно не просто приводит к ответу, а доставляет эстетическое удовольствие, ведь после долгих вычислений или громоздких выкладок вдруг находится удивительно простое объяснение.

1.3.3. Условия воспитания, анализ результатов

Воспитательный процесс осуществляется в условиях организации деятельности детского коллектива на основной площадке реализации программы в организации дополнительного образования детей в соответствии с нормами и правилами работы организации.

Анализ результатов воспитания проводится в процессе педагогического наблюдения за поведением детей, их общением, отношением друг к другу и в коллективе. Косвенная оценка результатов воспитания, достижения целевых ориентиров воспитания по программе проводится путём опросов родителей в процессе реализации программы (отзывы, анкетирование) и после её

завершения. Анализ результатов воспитания по программе не предусматривает определение персонифицированного уровня воспитанности, развития качеств личности конкретного ребёнка, а предполагает получение общего представления о продвижении детей по выбранным целевым ориентирам воспитания в процессе и по итогам реализации программы: что удалось достичь, а что является предметом воспитательной работы в будущем.

1.3.4. Календарный план воспитательной работы

№ п/п	Название события, мероприятия	Сроки	Форма проведения
1 год обучения			
1	Интерактивная викторина «Математика вокруг нас»	Сентябрь	Интерактивная викторина
2	Интерактивная викторина «Леонард Эйлер, его вклад в развитие российской науки»	Октябрь	Интерактивная викторина
3	Командная игра на основные законы логики «Принцесса или тигр»	Ноябрь	Соревнования в группе
4	Математическая регата, приуроченная ко дню математика	Декабрь	Соревнования в группе
5	Квест «Логика в действии: профессии, где логика рулит!»	Январь	Соревнования в группе
6	Математическая эстафета «А ну-ка, посчитай комбинации»	Февраль	Соревнования в группе
7	Математическое домино	Март	Соревнования в группе
8	Марафон «Одним росчерком»	Апрель	Соревнования в группе
9	Игра «Танграм»	Май	Соревнования в группе
2 год обучения			
1	Интерактивная викторина «А ты докажи»	Сентябрь	Интерактивная викторина
2	Квест «Мудрецы найдут решение»	Октябрь	Соревнования в группе
3	Интерактивная викторина «Геометрический калейдоскоп»	Ноябрь	Интерактивная викторина
4	Математическая регата, приуроченная ко дню математика	Декабрь	Соревнования в группе
5	Занятие-исследование «Решето Эратосфена»	Февраль	Занятие-исследование
6	Занятие-исследование «Теорема Эйлера на многогранниках и витражах»	Март	Занятие-исследование
7	Математическая абака	Апрель	Соревнования в группе
3 год обучения			
1	Игра-детектив по законам алгебры логики «Давай включай логику»	Октябрь	Соревнования в группе
2	Квест «Треугольник Паскаля: загадки»	Ноябрь	Соревнования в группе

3	Математический турнир, приуроченный ко дню математика	Декабрь	Соревнования в группе
4	Занятие-исследование «Геометрия на подвижных чертежах»	Февраль	Занятие-исследование
5	Интерактивная викторина «Индуктивные рассуждения в математике и не только»	Апрель	Интерактивная викторина
4 год обучения			
1	Интерактивная викторина «Где логика?»	Октябрь	Интерактивная викторина
2	Познавательная лекция «Теорема Ферма: научная история длиною в 350 лет»	Ноябрь	Лекция-беседа
3	Математический турнир, приуроченный ко дню математика	Декабрь	Соревнования в группе
4	Занятие-исследование «Уравнение Маркова»	Февраль	Занятие-исследование
5	Познавательная лекция «Геометрия Лобачевского. Научное открытие, которое перевернуло мир»	Апрель	Лекция-беседа

1.4. Содержание программы

1.4.1. Учебно-тематический план

Учебно-тематический план первого года обучения

№ п/п	Название раздела	Всего	Теория	Практика	Формы контроля
1.	Вводное занятие. Входной контроль.	2	0.5	1.5	Самостоятельная работа
2.	РАЗДЕЛ 1. Общие принципы решения математических задач	6	2	4	
	Предположения, метод от противного; Перебор возможностей; Примеры и контрпримеры; «Обратный» ход или анализ с конца	5	2	3	Опрос, педагогическое наблюдение
	<i>Интерактивная викторина «Математика вокруг нас»</i>	1	0	1	Интерактивная викторина
3.	РАЗДЕЛ 2. Множества	7	3	4	
	<i>Интерактивная викторина «Леонард Эйлер, его вклад в развитие российской науки»</i>	1	1	0	Интерактивная викторина
	Понятие множества, элементы множества, задание множеств; Равенство множеств, объединение, пересечение, дополнение множеств; Диаграммы Эйлера; Формула включения/исключения	4	2	2	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
4.	РАЗДЕЛ 3. Элементарные логические рассуждения	4	1	3	
	Элементы алгебры логики; Задачи на причину и следствия; Законы построения отрицания	3	1	2	Опрос, педагогическое наблюдение
	<i>Командная игра на основные законы логики «Принцесса или тигр»</i>	1	0	1	Соревнования в группе
5.	РАЗДЕЛ 4. Логические и иные задачи	10	2	8	
	<i>Квест «Логика в действии: профессии, где логика рулит!»</i>	2	0	2	Соревнования в группе
	Задачи про «Рыцарей и лжецов»; Задачи про «Мудрецов»; Лингвистические задачи; Криптоарифметические задачи (ребусы); Задачи на переливание и взвешивание	6	2	4	Самостоятельная работа
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
6.	РАЗДЕЛ 5. Четность и нечетность	4	2	2	

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
	Чередование; Четные и нечетные числа; Свойства четных и нечетных чисел; Разбиение на пары, соответствия	4	2	2	Опрос, педагогическое наблюдение
7.	РАЗДЕЛ 6. Делимость	8	2	6	
	Делимость и делители, кратность; Простые и составные числа; Общие делители; Взаимно простые числа; Разложение на простые множители; НОД и НОК Признаки делимости на 3, 4, 6, 9	6	2	4	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
8.	РАЗДЕЛ 7. Введение в комбинаторику	4	1	3	
	Задачи на комбинаторные рассуждения Понятие варианта, комбинации; Основные способы перебора; Дерево возможных вариантов; Правила сложения и умножения вариантов	3	1	2	Опрос, педагогическое наблюдение
	<i>Математическая эстафета «А ну-ка, посчитай комбинации»</i>	1	0	1	Соревнования в группе
9.	РАЗДЕЛ 8. Введение в графы	5	1	4	
	<i>Марафон «Одним росчерком»</i>	1	0	1	Соревнования в группе
	Граф как модель системы; Базовые определения и типы графов Графы в задачах	2	1	1	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
10.	РАЗДЕЛ 9. Введение в геометрию	6	2	4	
	Разрезание фигур. Составление фигур; Простейшие геометрические фигуры и их свойства; Геометрические конструкции; Метод раскраски; Развертки	5	2	3	Самостоятельная работа
	<i>Игра «Танграм»</i>	1	0	1	Соревнования в группе
11.	РАЗДЕЛ 10. Основы теории игр	6	2	4	
	Понятия игры и правильной игры; Стратегии, выигрышная стратегия; Игры-шутки; Симметричные стратегии; Анализ игры с конца	4	2	2	Опрос, педагогическое наблюдение

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео-рия	Прак-тика	Формы контроля
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
12.	РАЗДЕЛ 11. Принцип Дирихле:	4	1	3	
	Общие понятия и представления; Обобщенный вариант принципа Дирихле; Принцип Дирихле в задачах для 5 класса	4	1	3	Опрос, педагогическое наблюдение
13.	РАЗДЕЛ 12. Математические соревнования	4	0,5	3,5	
	Ознакомление с правилами математического аукциона, математического хоккея, карусели, регаты; Решение и анализ задач математических соревнований	4	0.5	3.5	Математические игры и соревнования
14.	Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа.	2	0	2	Проверочная работа
	Итого:	72	20	52	

Учебно-тематический план второго года обучения

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео-рия	Прак-тика	Формы контроля
1.	РАЗДЕЛ 1. Общие принципы решения математических задач	4	1	3	
	Логический вывод, предположения, метод от противного; Задачи с неопределенным ответом (задачи «можно ли...»), необходимость и достаточность примеров и контрпримеров	3	1	2	Самостоятельная работа
	Интерактивная викторина «А ты докажи»	1	0	1	Интерактивная викторина
2.	РАЗДЕЛ 2. Введение в оптимизационные задачи	6	1	5	
	Построение точных оценок в задачах; Задачи типа «оценка+пример» Доказательство в задачах	4	1	3	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
3.	РАЗДЕЛ 3. Турниры и задачи на логику	6	1	5	

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
	Задачи о турнирах и методы их решений; Задачи про «Рыцарей и лжецов»; Задачи про «Мудрецов»; Лингвистические задачи; Криптоарифметические задачи (ребусы)	5	1	4	Опрос, педагогическое наблюдение
	<i>Квест «Мудрецы найдут решение»</i>	1	0	1	Соревнования в группе
4.	РАЗДЕЛ 4. Геометрия	8	2	6	
	<i>Интерактивная викторина «Геометрический калейдоскоп»</i>	1	0	1	Интерактивная викторина
	Основные геометрические понятия; Неравенство треугольника; Задачи на разрезание	5	2	3	Самостоятельная работа
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
5.	РАЗДЕЛ 5. Делимость	4	1	3	
	Делители, общие делители, взаимно простые числа; Число делителей натурального числа; Основная теорема арифметики; Признаки делимости на произведение чисел	4	1	3	Опрос, педагогическое наблюдение
6.	РАЗДЕЛ 6. Арифметика остатков	8	2	6	
	Понятие неполного частного и остатка; Деление чисел с остатком, формальная запись деления с остатком; Арифметические операции с остатками: сложение и умножение остатков; Таблицы сложения и таблицы умножения остатков	6	2	4	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
7.	РАЗДЕЛ 7. Простые и составные числа	6	2	4	
	Общие свойства простых чисел; Свойства делимости на простое число; Теорема Евклида; Простые числа-близнецы	5	2	3	Самостоятельная работа
	<i>Занятие-исследование «Решето Эратосфена»</i>	1	0	1	Практические упражнения
8.	РАЗДЕЛ 8. Начала комбинаторики	8	2	6	
	Правила сложения и умножения вариантов; Простейшие комбинаторные формулы; Перестановки без/с повторениями	6	2	4	Опрос, педагогическое наблюдение

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
9.	РАЗДЕЛ 9. Принцип Дирихле	6	2	4	
	Повторение основных понятий из 5 класса; Принцип Дирихле в арифметических задачах для 6 класса	6	2	4	Опрос, педагогическое наблюдение
10.	РАЗДЕЛ 10. Введение в теорию графов	8	2	6	
	Граф как модель системы; Базовые определения и типы графов; Пути и циклы, Эйлеровы обходы; Связность графов, степени вершин; Лемма о рукопожатиях	6	2	4	Самостоятельная работа
	Занятие-исследование «Теорема Эйлера на многогранниках и витражах»	2	0	2	Практические упражнения
11.	РАЗДЕЛ 11. Математические соревнования	6	1	5	
	Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров	6	1	5	Математическое соревнование
13.	Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа.	2	0	2	Проверочная работа
	Итого:	72	17	55	

Учебно-тематический план третьего года обучения

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
1.	РАЗДЕЛ 1. Математическая логика	6	2	4	
	Логика высказываний; Таблицы истинности; Логические задачи; Принцип исключенного третьего; Принцип включения-исключения	5	2	3	Самостоятельная работа
	Игра-детектив по законам алгебры логики «Давай включай логику»	1	0	1	Соревнования в группе
2.	РАЗДЕЛ 2. Текстовые задачи	10	2	8	
	Задачи на проценты; Задачи на части; Задачи на смеси и сплавы; Задачи на движение; Задачи на работу; Иные текстовые задачи	8	2	6	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
3.	РАЗДЕЛ 3. Теория чисел	8	4	4	
	Позиционные и непозиционные системы счисления; Десятичная система счисления и признаки делимости; Последняя цифра в числе; Признаки делимости на 2^n , 5^n и др.; Алгоритм Евклида (повторение); Сравнения по модулю; Малая теорема Ферма	8	4	4	Опрос, педагогическое наблюдение
4.	РАЗДЕЛ 4. Инвариант	6	2	4	
	Понятие инварианта; Инварианты, связанные с делимостью и остатками; Инварианты, связанные с раскраской	4	2	2	Самостоятельная работа
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
5.	РАЗДЕЛ 5. Комбинаторика	8	4	4	
	Подмножества элементов; Сочетания, размещения, перестановки с повторениями и без повторений; Треугольник Паскаля; Бином Ньютона; Свойства биномиальных коэффициентов	7	4	3	Опрос, педагогическое наблюдение
	<i>Квест «Треугольник Паскаля: загадки»</i>	1	0	1	Соревнования в группе
6.	РАЗДЕЛ 6. Теория графов	6	2	4	
	Виды графов. Изоморфизм графов; Деревья, их свойства; Планарные и плоские графы; Теорема Эйлера; Оrientированные графы	4	2	2	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
7.	РАЗДЕЛ 7. Геометрия	10	2	8	
	Геометрические неравенства; Движения. Углы и площади; Клетчатая геометрия, формула Пика; Решение геометрических задач	8	2	6	Самостоятельная работа
	<i>Занятие-исследование «Геометрия на подвижных чертежах»</i>	2	0	2	Практические упражнения
8.	РАЗДЕЛ 8. Принцип математической индукции	8	2	6	

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
	Полная индукция; Примеры индуктивных рассуждений; Математическая индукция в задачах на делимость; Математическая индукция в доказательстве формул	7	2	5	Опрос, педагогическое наблюдение
	<i>Интерактивная викторина «Индуктивные рассуждения в математике и не только»</i>	1	0	1	Интерактивная викторина
9.	РАЗДЕЛ 9. Математические соревнования	8	0	8	
	Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров	8	0	8	Математическое соревнование
10.	Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа.	2	0	2	Проверочная работа
	Итого:	72	20	52	

Учебно-тематический план четвертого года обучения

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
1.	РАЗДЕЛ 1. Математическая логика	8	2	6	
	Принцип включения-исключения; Принцип исключенного третьего; Логические задачи; Задачи про турниры и игры	6	2	4	Опрос, педагогическое наблюдение
	<i>Интерактивная викторина «Где логика?»</i>	2	0	2	Интерактивная викторина
2.	РАЗДЕЛ 2. Теория чисел	8	4	4	
	<i>Познавательная лекция «Теорема Ферма: научная история длиной в 350 лет»</i>	1	1	0	Опрос, педагогическое наблюдение
	Функция Эйлера, обобщенная малая теорема Ферма (теорема Эйлера); Теорема Вильсона; Квадратичные вычеты Китайская теорема об остатках	5	3	2	Самостоятельная работа
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (<i>2 уровня сложности</i>)	2	0	2	Мини-олимпиада
3.	РАЗДЕЛ 3. Инвариант	10	2	8	

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
	Инварианты и полуинварианты; Инварианты и полуинварианты, связанные с четностью, делимостью и остатками; Инварианты и полуинварианты, связанные с раскраской; Инварианты в теории графов; Инварианты в геометрии и комбинаторной геометрии; Сложные инварианты и полуинварианты	8	2	6	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
4.	РАЗДЕЛ 4. Дискретная непрерывность	2	1	1	
	Дискретные процессы; Идея дискретной непрерывности	2	1	1	Самостоятельная работа
5.	РАЗДЕЛ 5. Оптимизация	6	1	5	
	Оценки и примеры; Принцип крайнего	4	1	3	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
6.	РАЗДЕЛ 6. Уравнения и неравенства	12	3	9	
	Занятие-исследование «Уравнение Маркова»	2	0	2	Практические упражнения
	Диофантовы уравнения, уравнения в простых числах; Уравнения, содержащие антье- функцию и мантисса-функцию; Средние величины, неравенства о средних, классические неравенства, неравенство Коши; Доказательство неравенств; Метод Штурма в доказательстве неравенств; Задачи на составление уравнений	8	3	5	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
7.	РАЗДЕЛ 7. Геометрия	8	4	4	

№ п/п	Название раздела	Всего	Тео- рия	Прак- тика	Формы контроля
	Метод ГМТ; Равенство и подобие треугольников; Симметрия; Движения и гомотетия; Многоугольники; Окружности, вписанные углы, вписанные и описанные многоугольники	7	3	4	Самостоятельная работа
	<i>Познавательная лекция «Геометрия Лобачевского. Научное открытие, которое перевернуло мир»</i>	1	1	0	Опрос, педагогическое наблюдение
8.	РАЗДЕЛ 8. Квадратный трехчлен	8	2	6	
	Квадратный трехчлен и его коэффициенты; Выделение полного квадрата; Корни квадратного трехчлена; Разложение на множители; Теорема Виета; Расположение корней квадратного трехчлена	6	2	4	Опрос, педагогическое наблюдение
	Мини-олимпиада на основе задач по пройденным разделам (2 уровня сложности)	2	0	2	Мини-олимпиада
9.	РАЗДЕЛ 9. Математические соревнования	8	0	8	
	Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров	8	0	8	Математические игры и соревнования
10.	Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа.	2	0	2	Контрольная работа
	Итого:	72	19	53	

1.4.2. Календарный учебный график

Календарный учебный график дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» составлен в соответствии с календарным учебным графиком ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа» на текущий учебный год.

2025/2026 учебный год начинается с 15 сентября 2025 года и заканчивается 14 июня 2026 года – 37 недель, из них: 36 недель – учебные занятия, 1 неделя – итоговая аттестация.

Проведение занятий планируется по полугодиям:

1 полугодие – с 15.09.2025 по 28.12.2025;

2 полугодие – с 12.01.2026 по 07.06.2026

Организационный период – с 01.09.2025 по 14.09.2025

Каникулы – 10 недель:

с 29.12.2025 по 11.01.2026 – зимние каникулы

15.06.2026 по 26.07.2026 и с 17.08.2026 по 31.08.2026 – летние каникулы

С 27.07.2026 по 16.08.2026 – летняя образовательная школа «Олимп»

Год обучения	Дата начала обучения	Дата окончания обучения	Всего учебных недель	Всего учебных дней	Всего учебных часов	Всего занятий в неделю
1 год обучения	16.09.2025	05.06.2026	36	36	72	1
2 год обучения	16.09.2025	05.06.2026	36	36	72	1
3 год обучения	16.09.2025	05.06.2026	36	36	72	1
4 год обучения	16.09.2025	05.06.2026	36	36	72	1

1.4.3. Содержание учебного плана

Содержание учебного плана первого года обучения

1. Вводное занятие. Входной контроль.

2. РАЗДЕЛ 1. Общие принципы решения математических задач (6 ч.)

Теория:

- Предположения, метод от противного
- Перебор возможностей
- Примеры и контрпримеры
- «Обратный» ход или анализ с конца

Практика: Решение задач на полный перебор случаев, возможностей, комбинаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез.

3. РАЗДЕЛ 2. Множества (7 ч.)

Теория:

- Понятие множества, элементы множества, задание множеств
- Равенство множеств, объединение, пересечение, дополнение множеств
- Диаграммы Эйлера
- Формула включения/исключения

Практика: Решение олимпиадных задач, в решении которых используется диаграмма Эйлера.

4. РАЗДЕЛ 3. Элементарные логические рассуждения (4 ч.)

Теория:

- Элементы алгебры логики
- Задачи на причину и следствия
- Законы построения отрицания

Практика: Решение задач.

5. РАЗДЕЛ 4. Логические и иные задачи (10 ч.)

Теория:

- Задачи про «Рыцарей и лжецов»
- Задачи про «Мудрецов»;
- Задачи на логику
- Лингвистические задачи
- КRYPTOарифметические задачи (ребусы)
- Задачи на переливание и взвешивание

Практика: Решение логических задач, лингвистических задач, ребусов.

6. РАЗДЕЛ 5. Четность и нечетность (4 ч.)

Теория:

- Чередование
- Четные и нечетные числа
- Свойства четных и нечетных чисел
- Разбиение на пары, соответствия

Практика: Решение задач на соответствия, на разбиения на пары, на чередования, простейшие задачи на раскраску, на разбиение чисел.

7. РАЗДЕЛ 6. Делимость (8 ч.)

Теория:

- Делимость и делители, кратность
- Простые и составные числа
- Общие делители
- Взаимно простые числа
- Разложение на простые множители
- Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное
- Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10

Практика: Решение задач.

8. РАЗДЕЛ 7. Введение в комбинаторику (4 ч.)

Теория:

- Понятие варианта, комбинации
- Основные способы перебора
- Дерево возможных вариантов
- Правила сложения и умножения вариантов
- Простейшие комбинаторные формулы

Практика: Решение практических задач.

9. РАЗДЕЛ 8. Введение в теорию графов (5 ч.)

Теория:

- Граф как модель системы
- Базовые определения и типы графов

Практика: Решение практических задач.

10. РАЗДЕЛ 9. Введение в геометрию (6 ч.)

Теория:

- Разрезание фигур. Составление фигур
- Простейшие геометрические фигуры и их свойства
- Геометрические конструкции
- Метод раскраски фигур
- Развертки

Практика: Решение задач на разрезание, задач на клетчатой бумаге

11. РАЗДЕЛ 10. Основы теории игр (6 ч.)

Теория:

- Понятия игры и правильной игры
- Стратегии, выигрышная стратегия
- Игры-шутки
- Симметричные стратегии
- Анализ игры с конца

Практика: Решение задач.

12. РАЗДЕЛ 11. Принцип Дирихле (4 ч.)

Теория:

- Общие понятия и представления
- Обобщенный вариант принципа Дирихле
- Принцип Дирихле в арифметических задачах

Практика: Решение задач.

13. РАЗДЕЛ 12. Математические соревнования (4 ч.)

Теория: Ознакомление с правилами математического аукциона, математического хоккея, карусели, регаты.

Практика: Проведение математических соревнований. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.

14. Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа (2 ч.)

Теория: Подведение итогов.

Практика: Проведение итоговой контрольной работы.

Содержание учебного плана второго года обучения

1. РАЗДЕЛ 1. Общие принципы решения математических задач (4 ч.)

– *Теория:*

- Логический вывод, предположения, метод от противного
- Задачи с неопределенным ответом (задачи «можно ли...»), необходимость и достаточность примеров и контрпримеров

Практика: Решение задач на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез, на конструирование примеров и контрпримеров, полный перебор комбинаций.

2. РАЗДЕЛ 2. Введение в оптимизационные задачи (6 ч.)

Теория:

- Построение точных оценок в задачах
- Задачи типа «оценка + пример»

Практика: Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения.

3. РАЗДЕЛ 3. Турниры и задачи на логику (6 ч.)

Теория:

- Задачи о турнирах и методы их решений
- Задачи про «Рыцарей и лжецов»
- Задачи про «Мудрецов»
- Лингвистические задачи
- Криптоарифметические задачи (ребусы)

Практика: Решение логических задач.

4. РАЗДЕЛ 4. Геометрия (8 ч.)

Теория:

- Основные геометрические понятия
- Неравенство треугольника
- Задачи на разрезание

Практика: Решение задач на разрезание.

5. РАЗДЕЛ 5. Делимость (4 ч.)

Теория:

- Делители, общие делители, взаимно простые числа
- Число делителей натурального числа
- Основная теорема арифметики
- Признаки делимости на произведение чисел

Практика: Решение практических задач.

6. РАЗДЕЛ 6. Арифметика остатков (8 ч.)

Теория:

- Понятие неполного частного и остатка
- Деление чисел с остатком, формальная запись деления с остатком
- Арифметические операции с остатками: сложение и умножение остатков
- Таблицы сложения и таблицы умножения остатков

Практика: Решение практических задач.

7. РАЗДЕЛ 7. Простые и составные числа (6 ч.)

Теория:

- Общие свойства простых чисел
- Свойства делимости на простое число
- Теорема Евклида
- Решето Эратосфена
- Простые числа-близнецы

Практика: Решение практических задач.

8. РАЗДЕЛ 8. Начала комбинаторики (8 ч.)

Теория:

- Понятие варианта, комбинации
- Основные способы перебора
- Дерево возможных вариантов
- Правила сложения и умножения вариантов
- Простейшие комбинаторные формулы
- Перестановки без/с повторениями

Практика: Решение практических задач.

9. РАЗДЕЛ 9. Принцип Дирихле (6 ч.)

Теория:

- Повторение основных понятий из содержания занятий первого года обучения
- Принцип Дирихле в арифметических задачах для 6 класса

Практика: Решение практических задач.

10. РАЗДЕЛ 10. Введение в теорию графов (8 ч.)

Теория:

- Граф как модель системы
- Базовые определения и типы графов
- Пути и циклы, Эйлеровы обходы
- Связность графов, степени вершин
- Лемма о рукопожатиях

Практика: Решение практических задач.

11. РАЗДЕЛ 11. Математические соревнования (6 ч.)

Теория: Правила математических соревнований.

Практика: Проведение математического соревнования, олимпиады. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.

12. Итоговое занятия. Итоговая проверочная работа (2 ч.)

Теория: Подведение итогов.

Практика: Проведение итоговой контрольной работы.

Содержание учебного плана третьего года обучения

1. РАЗДЕЛ 1. Математическая логика (6 ч.)

Теория:

- Логика высказываний
- Таблицы истинности
- Логические задачи
- Принцип исключенного третьего
- Принцип включения-исключения

Практика: Решение практических задач.

2. РАЗДЕЛ 2. Текстовые задачи (10 ч.)

Теория:

- Задачи на проценты
- Задачи на части
- Задачи на смеси и сплавы
- Задачи на движение
- Задачи на работу
- Иные текстовые задачи

Практика: Решение практических задач.

3. РАЗДЕЛ 3. Теория чисел (8 ч.)

Теория:

- Позиционные и непозиционные системы счисления
- Десятичная система счисления и признаки делимости
- Последняя цифра в числе
- Признаки делимости на 2^n , 5^n и др.
- Алгоритм Евклида (повторение)
- Сравнения по модулю
- Малая теорема Ферма

Практика: Решение практических задач.

4. РАЗДЕЛ 4. Инвариант (6 ч.)

Теория:

- Понятие инварианта
- Инварианты, связанные с делимостью и остатками
- Инварианты, связанные с раскраской

Практика: Решение задач на исследование инвариантов, связанных с раскраской, задач на разрезание.

5. РАЗДЕЛ 5. Комбинаторика (8 ч.)

Теория:

- Подмножества элементов
- Сочетания, размещения, перестановки с повторениями и без повторений
- Треугольник Паскаля
- Бином Ньютона
- Свойства биномиальных коэффициентов

Практика: Решение задач на перебор, задач на подсчет количества комбинаций (по большей части связанных с подсчетом количества подмножеств или наборов элементов некоторого конечного множества)

6. РАЗДЕЛ 6. Теория графов (6 ч.)

Теория:

- Виды графов. Изоморфизм графов
- Деревья, их свойства
- Планарные и плоские графы
- Теорема Эйлера
- Ориентированные графы

Практика: Решение практических задач.

7. РАЗДЕЛ 7. Геометрия (10 ч.)

Теория:

- Геометрические неравенства
- Движения. Углы и площади
- Клетчатая геометрия, формула Пика
- Решение геометрических задач

Практика: Решение практических задач.

8. РАЗДЕЛ 8. Принцип математической индукции (8 ч.)

Теория:

- Полная индукция
- Примеры индуктивных рассуждений
- Математическая индукция в задачах на делимость
- Математическая индукция в доказательстве формул

Практика: Решение практических задач.

9. РАЗДЕЛ 9. Математические соревнования (8 ч.)

Теория: Правила математических соревнований.

Практика: Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.

10. Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа (2 ч.)

Теория: Подведение итогов.

Практика: Проведение итоговой контрольной работы.

Содержание учебного плана четвертого года обучения

1. РАЗДЕЛ 1. Математическая логика (8 ч.)

Теория:

- Принцип включения-исключения
- Принцип исключенного третьего
- Логические задачи

- Задачи про турниры и игры

Практика: Решение логических задач, в том числе задач про турнир, задач на принцип исключенного третьего и принцип включения-исключения.

2. РАЗДЕЛ 2. Теория чисел (8 ч.)

Теория:

- Диофантовы уравнения, уравнения в простых числах
- Функция Эйлера, обобщенная малая теорема Ферма (теорема Эйлера)
- Теорема Вильсона
- Квадратичные вычеты

Практика: Решение задач на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования простых или составных чисел с указанными ограничениями (например, бесконечность множества простых чисел определенного вида), самостоятельное решение уравнений в целых числах.

3. РАЗДЕЛ 3. Инвариант (10 ч.)

Теория:

- Инварианты и полуинварианты
- Инварианты и полуинварианты, связанные с четностью, делимостью и остатками
- Инварианты и полуинварианты, связанные с раскраской
- Инварианты в теории графов
- Инварианты в геометрии и комбинаторной геометрии
- Сложные инварианты и полуинварианты

Практика: Решение практических задач.

4. РАЗДЕЛ 4. Дискретная непрерывность (2 ч.)

Теория:

- Дискретные процессы
- Идея дискретной непрерывности

Практика: Решение практических задач.

5. РАЗДЕЛ 5. Оптимизация (6 ч.)

Теория:

- Оценки и примеры
- Принцип крайнего

Практика: Решение практических задач.

6. РАЗДЕЛ 6. Нестандартные уравнения и неравенства (12 ч.)

Теория:

- Уравнения, содержащие антье-функцию и мантисса-функцию
- Средние величины, неравенства о средних, классические неравенства, неравенство Коши
- Доказательство неравенств
- Метод Штурма в доказательстве неравенств
- Задачи на составление уравнений

Практика: Решение практических задач.

7. РАЗДЕЛ 7. Геометрия (8 ч.)

Теория:

- Метод ГМТ
- Равенство и подобие треугольников
- Симметрия
- Движения и гомотетия
- Многоугольники
- Окружности, вписанные углы, вписанные и описанные многоугольники

Практика: Решение практических задач.

8. РАЗДЕЛ 8. Квадратный трехчлен (8 ч.)

Теория:

- Квадратный трехчлен и его коэффициенты
- Выделение полного квадрата
- Корни квадратного трехчлена
- Разложение на множители
- Теорема Виета
- Расположение корней квадратного трехчлена

Практика: Решение практических задач.

9. РАЗДЕЛ 9. Математические соревнования (8 ч.)

Теория: Правила математических соревнований.

Практика: Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.

10. Итоговое занятия. Итоговая проверочная работа (2 ч.)

Теория: Подведение итогов.

Практика: Проведение итоговой контрольной работы.

Методические рекомендации по освоению содержания разделов учебно – тематического плана и примеры математических задач для каждого года обучения представлены в Приложении 2 и Приложении 3.

1.5. Планируемые результаты

Ожидаемый результат 1-го года обучения

Личностными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- формирование представления о математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для общественного прогресса;
- потребность сотрудничества со сверстниками;
- умение систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- проявление любознательности, сообразительности при решении разнообразных математических заданий;

Метапредметными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- проявление у обучающихся устойчивого интереса к математике;
- развитие способности к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные результаты освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

обучающиеся должны *знать*:

- элементарные методы доказательства (построение контрпримера, предположение противоположного);
- основные понятия и определения из теории множеств, теории чисел, теории игр;

обучающиеся должны *уметь*:

- формулировать решения задач, подробно и логично излагая собственные идеи;
- систематизировать, сопоставлять, анализировать, обобщать и интерпретировать информацию,
- использовать вспомогательные инструменты при решении нестандартных задач (круги Эйлера, таблицы, логические схемы и другие);
- проводить анализ задач с конца, используя обратный ход;
- строить примеры, контрпримеры, конструкции, развертки;

обучающиеся должны *владеть*:

- основными подходами при решении задач олимпиадной математики;
- начальной математической терминологией.

Ожидаемый результат 2-го года обучения

Личностными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- умение работать в команде, проявление лидерских качеств;
- умение глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- проявление любознательности, сообразительности при решении разнообразных математических заданий;

Метапредметными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- проявление у обучающихся устойчивого интереса к математике;
- развитие способности к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные результаты освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

обучающиеся должны *знать*:

- основные понятие, определения и формулы из области комбинаторики и теории графов;
- основные требования при оформлении решений оптимизационных задач;

обучающиеся должны *уметь*:

- правильно интерпретировать условия комбинаторной задачи и понимать какие формулы необходимы для ее решения;
- строить оценку при решении задач на оптимизацию и составлять математические модели;
- решать лингвистические задачи и ребусы, используя математические инструменты и логические рассуждения;
- выполнять арифметические операции с числами с остатками;

обучающиеся должны *владеть*:

- различными методами при решении логических задач, геометрических задач и иных задач,
- навыком логического обоснования своих идей и подходов к решению нестандартной задачи.

Ожидаемый результат 3-го года обучения

Личностными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- умение работать в команде, проявление лидерских качеств;

- умение глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- проявление любознательности, сообразительности при решении разнообразных математических заданий;

Метапредметными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- проявление у обучающихся устойчивого интереса к математике;
- развитие способности к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные результаты освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

обучающиеся должны *знать*:

- формулы, используемые при решении текстовых задач;
- определение инварианта и его формы;
- малую теорему Ферма и ее доказательство;
- свойства треугольника Паскаля и формулу бинома Ньютона.

обучающиеся должны *уметь*:

- строить строгие доказательства, используя метод математической индукции;
- решать текстовые задачи на совместную работу, движение, проценты и части, смеси и растворы;
- строить таблицы истинности для сложных высказываний;
- решать комбинаторные задачи с ограничениями;
- находить числа, сравнимые по модулю.

обучающиеся должны *владеть*:

- терминологией математической логики;
- признаками делимости числа на степени двойки и пятерки;
- навыком построения строгих доказательств.

Ожидаемый результат 4-го года обучения

Личностными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- умение работать в команде, проявление лидерских качеств;
- умение глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- проявление любознательности, сообразительности при решении разнообразных математических заданий;

Метапредметными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

- проявление у обучающихся устойчивого интереса к математике;
- развитие способности к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные результаты освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» является:

обучающиеся должны **знать**:

- законы математической логики и правила тождественных преобразований;
- понятие полуинварианта и его формы;
- неравенства и их доказательства (транснаравенство, неравенство Чебышева, неравенства о средних другие).

обучающиеся должны **уметь**:

- строить высказывания и проводить тождественные преобразования, опираясь на правила и законы математической логики;
- решать логические задачи методом логических уравнений и используя таблицы истинности;
- формулировать строгие доказательства задач в общем виде, используя метод математической индукции, доказательство от противного, идеи дискретной непрерывности;
- решать задачи повышенной сложности, опираясь на знания и методы решения задач, полученные за всю программу обучения и оценивать полученные результаты.

обучающиеся должны **владеть**:

- различными методами и нестандартными подходами при решении диафантовых уравнений;
- навыком строгого математического рассуждения;
- строгой математической терминологией.

РАЗДЕЛ 2. Комплекс организационно-педагогических условий

2.1. Календарный учебный график

Количество учебных недель: 36 недели

Количество учебных дней: 36 дней

2.2. Условия реализации программы

2.2.1. Материально-техническое обеспечение

Для реализации дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» необходимый перечень материально-технического обеспечения включает в себя:

- Столы,
- стулья
- доска (меловая/маркерная)
- мел/маркеры
- комплекты задач (по каждому году обучения)
- технические средства обучения (компьютер/ноутбук) с подключением к сети Интернет (по необходимости).

2.2.2. Кадровое обеспечение

Настоящая программа может быть реализована педагогом дополнительного образования или учителем, имеющими высшее профессиональное образование в области математики. Желателен опыт работы с талантливыми и способными детьми, умение стимулировать их познавательную активность, поддерживать различные виды интеллектуальной и творческой деятельности; наличие высокого потенциала и способностей к профессиональному саморазвитию и самосовершенствованию.

2.3. Формы аттестации

2.3.1. Формы отслеживания и фиксации образовательных результатов

Подведение итогов реализации программы представляет комплексную систему, которая включает в себя:

1. Внутренние результаты:

1.1. Текущий контроль освоения программы

Текущий контроль проводится после изучения каждой двух новых разделов программы в форме письменной работы или мини-олимпиады. Комплект заданий разделен на два уровня сложности: на первом уровне представлены задачи из олимпиад регионального уровня, на втором – задачи из

олимпиад федерального уровня (Приложение 4). Уровень сложности заданий обучающиеся выбирают самостоятельно, тем самым они учатся проводить самооценку своих знаний и возможностей. Такой подход дает возможность проанализировать текущий результат обучающихся и увидеть пробелы в знаниях детей. Как правило, группа обучающихся делится на способных детей и детей, у которых есть интерес к математике, но не хватает математических знаний для решения нестандартных задач. В такой ситуации, выбор уровня сложности выполнения заданий содействует гармоничному развитию математических способностей у всех обучающихся учебной группы, при этом сохраняется интерес к математике, уверенность в себе, развивается спортивный интерес и мотивация перехода на следующий уровень. Следует заметить, что не у каждого обучающегося самоцель обучения по дополнительной программе – призовые места на региональных и всероссийских олимпиадах. Некоторые приходят на занятия с целью получения дополнительного математического развития, способствующего углубленному освоению системы предметных знаний по математике.

1.2. Итоговый контроль освоения программы

В конце учебного года, как правило, проводится итоговая письменная работа (Приложение 5). Данная работа едина для всех обучающихся группы. Это дает возможность педагогу проанализировать уровень знаний как у всей группы, так и индивидуально по каждому ребенку, а непосредственно самому обучающемуся – оценить себя в рамках всей группы. По результатам письменной работы педагог может оценить пробелы в знаниях у каждого обучающегося и дать рекомендации и дополнительные задания по проблемной теме для самостоятельной работы ребенка на летних каникулах.

2. Внешние результаты

Внешние результаты подразумевают результаты обучающихся в различных математических соревнованиях: олимпиадах, играх, викторинах, конкурсах и т.д.

Все полученные во время обучения результаты, как внутренние, так и внешние, заносятся в рейтинговую таблицу группы (Приложение 6).

Критерии и показатели уровня освоения обучающимися содержания программы

Критерии	Показатели	Индикаторы	Число баллов	Методы диагностики
<i>Предметные результаты:</i>				
Теоретическая подготовка				
Уровень теоретических знаний по основным разделам учебно-тематического плана программы	Соответствие теоретических знаний программным требованиям	не усвоил теоретическое содержание программы	0	Наблюдение, тестирование, опросы, проверочные контрольные работы, итоговая контрольная работа и др.
		овладел менее чем 1/2 объема знаний, предусмотренных программой	1	
		объем усвоенных знаний составляет более 1/2	2	

Критерии	Показатели	Индикаторы	Число баллов	Методы диагностики
		освоил весь объем знаний, предусмотренных программой	3	
Уровень владения специальной математической терминологией	Осмысленность и правильность использования специальной терминологии	не употребляет специальные термины	0	Наблюдение, собеседование
		знает отдельные специальные термины, но избегает их употреблять	1	
		сочетает специальную терминологию с бытовой	2	
		специальные термины употребляет осознанно и в полном соответствии с их содержанием	3	
Практическая подготовка				
Уровень умений и навыков решения нестандартных задач и задач повышенной сложности	Соответствие практических умений и навыков	не овладел умениями и навыками	0	Наблюдение, тестирование, опросы, проверочные контрольные работы, итоговая контрольная работа и др.
		овладел менее чем 1/2 предусмотренных умений и навыков	1	
		объем усвоенных умений и навыков составляет более 1/2	2	
		овладел практически всеми умениями и навыками, предусмотренными программой	3	
Уровень креативности, нестандартного мышления и творческого подхода к поиску решения задач	Наличие творческого подхода при выполнении практических заданий	начальный (элементарный) уровень развития креативности - ребенок в состоянии выполнять лишь простейшие практические задания педагога	0	Наблюдение, тестирование, опросы, проверочные контрольные работы, итоговая контрольная работа и др.
		репродуктивный уровень – в основном, выполняет задания на основе образца	1	
		творческий уровень (I) – видит необходимость принятия творческих решений, выполняет практические задания с элементами творчества с помощью педагога	2	
		творческий уровень (II) - выполняет практические задания с элементами творчества самостоятельно	3	
Личностные результаты:				
Уровень проявления любознательности и самостоятельности при выполнении	Наличие мотивации к обучению	пропускает занятия, отсутствует интерес к обучению	0	Наблюдение
		малоактивен, наблюдает за	1	

Критерии	Показатели	Индикаторы	Число баллов	Методы диагностики
разнообразных заданий		деятельностью других, забывает выполнить задание, результативность низкая		
		активен, проявляет устойчивый познавательный интерес, трудолюбив, добивается хороших результатов	2	
		активен, проявляет устойчивый познавательный интерес, целеустремлен, трудолюбив и прилежен, добивается высоких результатов, инициативен	3	
Умение работать в команде, проявлять лидерские качества	Наличие ответственности и лидерских качеств	уклоняется от решения задач, часто не дисциплинирован, нарушает правила поведения, не всегда реагирует на воспитательные воздействия, в творческую деятельность не вступает, уровень выполнения заданий, как правило, репродуктивный.	0	Наблюдение
		неохотно решает задачи, начинает работу, но часто не доводит ее до конца, справляется с поручениями и соблюдает правила поведения только при наличии контроля и требовательности преподавателя или товарищей, способен принимать творческие решения, но, в основном использует традиционные способы решения	1	
		решает задачи охотно, ответственно, способен принимать творческие решения, но, в основном, использует традиционные способы решения	2	
		решает задачи самостоятельно и с интересом, ответственен, часто по собственному желанию решает дополнительные задачи, имеет высокий творческий потенциал, находит нестандартные решения,	3	

Критерии	Показатели	Индикаторы	Число баллов	Методы диагностики
		новые способы выполнения заданий		

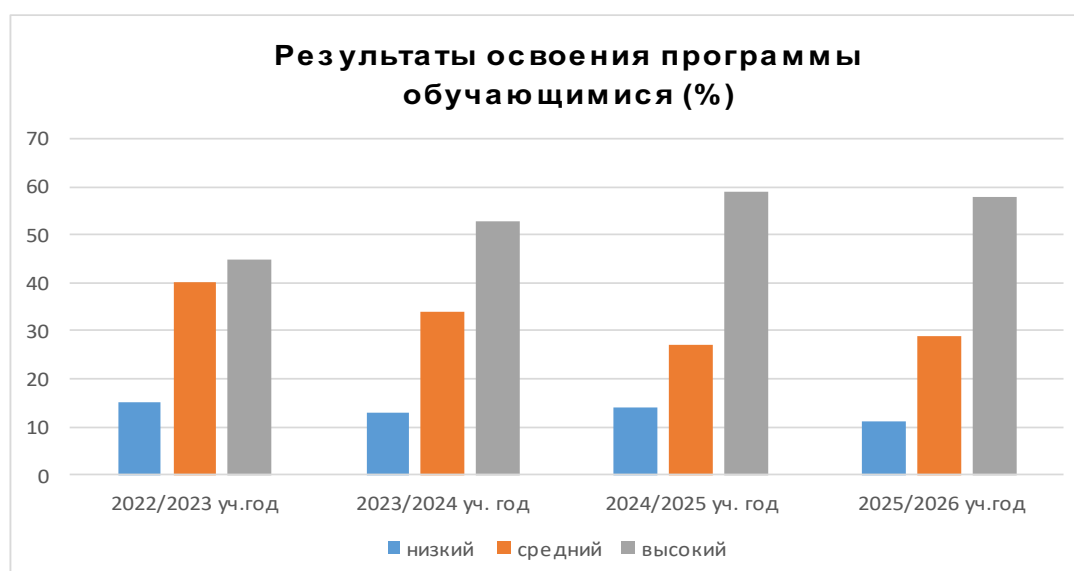
Итоговый показатель подсчитывается следующим образом:

- Высокий уровень – (15 – 18 балл) – обучающийся умеет применять полученные знания и умения для выполнения самостоятельных заданий, его деятельность отмечена умением самостоятельно оценивать различные ситуации, явления, факты, выявлять и отстаивать личную позицию, при решении задач использует творческий подход, уровень результативности и мотивации высокий.

- Средний уровень – (11 – 14 баллов) - обучающийся воспроизводит основной программный материал, выполняет задания по образцу, обладает элементарными умениями учебной деятельности, самостоятельно применяет знания в стандартных ситуациях, исправляет допущенные ошибки.

- Низкий уровень – (0 – 10 баллов) - обучающийся различает объекты изучения, воспроизводит незначительную часть программного материала, с помощью педагога выполняет элементарные задания, уровень результативности и мотивации низкий.

Результаты освоения обучающимися дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» за текущий период реализации программы, представленные на диаграмме, показали, что большая часть обучающихся (2022/2023 уч.г. – 85%, 2023/2024 уч.г. – 87%, 2024/2025 уч.г. – 86%, 2025/2026 уч.год – 89%) успешно освоили программу и имеют положительную динамику по показателям.



Одним из показателей успешной реализации дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» так же являются достижения обучающихся в математических олимпиадах и турнирах различного уровня.

Ежегодно обучающиеся принимают участие в региональной олимпиаде школьников по математике, открытом турнире любителей математики, посвященном памяти заслуженного учителя Российской Федерации Игоря Васильевича Чуя, Санкт-Петербургской олимпиаде школьников по математике для обучающихся 6 – 8 классов, Уральском турнире юных математиков, успешно проходят отбор и становятся участниками профильных смен образовательного центра «Сириус», летней образовательной школы «ОЛИМП» и зимней математической школы ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа», программы которых включают интенсивные учебно-тренировочные занятия по подготовке к математическим соревнованиям.

Уровень	Название	Учебный год	Количество участников	Победители Призеры
Региональный	Региональная олимпиада школьников по математике	2022/2023	10	4
Региональный	Открытый турнир любителей математики, посвященный памяти заслуженного учителя Российской Федерации Игоря Васильевича Чуя	2022/2023	8	2
Межрегиональный	Турнир математических боев имени А.П. Савина	2022/2023	1	1
Региональный	Региональная олимпиада школьников по математике	2023/2024	14	6
Региональный	Открытый турнир любителей математики, посвященный памяти заслуженного учителя Российской Федерации Игоря Васильевича Чуя	2023/2024	11	3
Федеральный	Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике для обучающихся 6 – 8 классов	2023/2024	1	1
Международный	X Международный математический конкурс GS Group для старшеклассников из нестоличных городов "Я решаю!"	2023/2024	1	1
Международный	XXVI Международный математический турнир старшеклассников «Кубок памяти А.Н. Колмогорова»	2023/2024	1	1
Региональный	Региональная олимпиада школьников по математике	2024/2025	20	11
Региональный	Открытый турнир любителей математики, посвященный памяти заслуженного учителя Российской Федерации Игоря Васильевича Чуя	2024/2025	15	6
Международный	XXVII Международный математический турнир старшеклассников «Кубок памяти А.Н. Колмогорова»	2024/2025	2	1
Федеральный	Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике для обучающихся 6 – 8 классов	2025/2026	2	1
Региональный	Региональная олимпиада школьников по математике	2025/2026	18	11

Региональный	Открытый турнир любителей математики, посвященный памяти заслуженного учителя Российской Федерации Игоря Васильевича Чуя	2025/2026	17	8
--------------	--	-----------	----	---

Наблюдается устойчивый интерес детей к математическим олимпиадам и турнирам. 90% из общего числа обучающихся, занимающихся по программе, принимают участие в математических соревнованиях различного уровня. Из них около 30% становятся победителями и призерами.

В 2022 г. и 2025 г. четвертым обучающимся были вручены свидетельства губернаторских стипендиатов.

В соответствии с распоряжением Губернатора Ярославской области от 26.08.2022 г. № 171-р «О назначении и выплате ежемесячных губернаторских стипендий одарённым детям и единовременных губернаторских премий педагогам, тренерам, научным руководителям, иным наставникам одарённых детей» присуждена губернаторская стипендия Разанковой Надежде и Штурману Арсению.

В соответствии с распоряжением Губернатора Ярославской области от 12.08.2025 г. № 148-р «О назначении и выплате ежемесячных губернаторских стипендий одарённым детям и единовременных губернаторских премий педагогам, тренерам, научным руководителям, иным наставникам одарённых детей» присуждена губернаторская стипендия Лоскуткину Евгению и Штурману Арсению.

2.4. Методическое обеспечение

Содержание программы представляет собой единую систему взаимосвязанных тем, которые постепенно усложняются от одного года обучения к другому. Изучение материала происходит по «восходящей спирали», т.е. периодическое возвращение к темам на более высоком и сложном уровне. Задания, предлагаемые обучающимся, соответствуют их возрасту и уровню подготовки.

Освоение содержания программы способствует интеллектуальному, творческому, эмоциональному развитию обучающихся. При реализации содержания программы учитываются возрастные и индивидуальные возможности подростков, создаются условия для успешности каждого ребенка. При отборе содержания и структурирования программы использованы обще-дидактические принципы:

- доступности;
- преемственности;
- перспективности;
- развивающей направленности;
- учета индивидуальных особенностей;
- органического сочетания обучения и воспитания, практической направленности и
- посильности.

Основной формой организации образовательного процесса по программе является учебное занятие, направленное на активный поиск и приобретение знаний обучающимися, включение их в атмосферу сотрудничества. Большая часть времени на учебном занятии отводится решению практических задач.

Метод обучения через последовательное решение задач базируется на следующих дидактических положениях:

- наилучший способ обучения детей, дающий им сознательные и прочные знания и обеспечивающий одновременное их умственное развитие, заключается в том, что перед обучающимися ставятся последовательно одна за другой посильные теоретические и практические задачи, решение которых даёт им новые знания;
- с помощью задач, последовательно связанных друг с другом, можно ознакомить обучающихся даже с довольно сложными математическими теориями;
- усвоение учебного материала через последовательное решение задач происходит в едином процессе приобретения новых знаний и их немедленного применения, что способствует развитию познавательной самостоятельности и творческой активности обучающихся.

Теоретическая часть также не менее важна и требует от педагога творческого подхода и внимания. Для того чтобы занятия не были утомительными, теоретический материал предлагается обучающимся в интересной и доступной форме, побуждая их к самостоятельным размышлениям, спорам, доказательствам. При этом у детей формируется аналитическое мышление, развивается навык публичных выступлений, расширяется объем знаний путем обмена информацией. Исторический материал и работа с информацией входят в процесс обучения математике и в урочной деятельности, поэтому в рамках учебных занятий по данной программе рекомендуется при любой возможности мотивировать обучающихся на занятия математикой очерками об истории математики, историями из жизни великих математиков, сведениями из достижений современной математической науки, т.е. самым широким образом популяризировать математику. Что касается работы с информацией, то любая встреча с математикой, точнее, с учебными задачами по математике, непосредственно связана с «работой с информацией».

Закрепление пройденного материала, приобретение умений и навыков происходит в процессе практической деятельности обучающихся. При выполнении практических заданий желательно добиваться самостоятельности в действиях детей, вырабатывая у них систему собственных взглядов на способы решения задач, воспитывать ответственность.

Для поддержания у обучающихся первого года обучения интереса к изучаемому материалу на занятиях применяются дидактические игры, больше внимания уделяется решению задач, объем теоретических занятий должен быть минимальным. Следует обучать детей не столько фактам, сколько идеям и способам рассуждений. Введение основных тем, стандартных задач происходит при постепенном погружении в данный тип задач. Основные виды задач

разбираются вместе с педагогом, затем обучающимся даются задачи для самостоятельного решения.

Важно отметить, что количество часов, отводимых на реализацию программы невелико, а каждый ребенок должен «попробовать» и почувствовать вкус к тем или иным видам задач и сформировать относительно устойчивое умение решать эти задачи. Поэтому содержание программы устроено таким образом, что тематические разделы математики чередуются, естественно при этом темы не повторяются: элементы геометрии, логические задачи, текстовые задачи и т.д.

Одним из подходов к проектированию учебного занятий по данной программе является условное разделение каждого учебного занятия на 2 части. Первая часть посвящена изучению нового материала и самостоятельной работе обучающихся. Вторая часть занятия включает в себя решение задач и обсуждение решений особо трудных и интересных задач. Такой подход к проведению занятий способствует успешному переходу от форм и методов обучения в школе к формам и методам обучения в высших учебных заведениях.

Содержание программы первого года обучения направлено на пропедевтику основных разделов математики: «Теория игр», «Теория чисел», «Теория множеств», «Математическая логика». Обучающиеся приобретают начальные навыки доказательства математических фактов, учатся оформлять решения задач в полном виде, опираясь на логические рассуждения. Основной задачей первого года является развитие интереса у детей к математике, формирования устойчивого понимания, что математика может быть «нескучной», а решения задач – нестандартными и творческими.

Начиная со второго года обучения дети начинают знакомство с новыми разделами математики: «Комбинаторика» и «Теория графов». Основная задача – научиться решать задачи в общем виде, избегая таких подходов как перебор вариантов и оформления доказательства с помощью 2-3 частных примеров. Геометрический раздел первых двух годов обучения вводится с целью развития пространственного мышления у обучающихся и не содержит строгих теорем и доказательств.

Программа третьего года обучения нацелена на плавный переход от занимательной математики к математике как науке. Практически во всех разделах уже вводятся теоремы и рассматриваются их доказательства, уровень сложности задач повышается. Так как в 7 классе школьная математика делится на два предмета: алгебра и геометрия, то геометрический раздел программы уже опирается на математические факты, понятия и теоремы.

Завершающий четвертый год обучения построен на строгом математическом материале. Учитывая, что с 9 класса у школьников появляется возможность принять участие в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике и других перечневых олимпиад, то программа нацелена в первую очередь уже не на развитие интереса у широкого круга школьников, а на углубление знаний у способных обучающихся. Теоретическая часть программы содержит строгие доказательства, практические занятия включают задачи повышенного уровня сложности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов Н.Х., Купцов Л.П., Нестеренок Ю.В. и др. Математические олимпиады школьников. - М.: Просвещение: Учеб. лит., 1997. - 208 с.
2. Агаханов Н.Х., Терешин Д.А., Кузнецова Г.М. Школьные математические олимпиады. - М., Дрофа, 1999. - 131 с.
3. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел для математических школ. - М., МЦНМО, 2001
4. Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. - М., МЦНМО, 2004
5. Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике. 3-е изд. — Ростов н/Д : Феникс, 2008. — 364, [1] с.: ил. — (Библиотека учителя).
6. Баранова Т.А., Блинков А.Д., Кочетков К.П., Потапова М.Г., Семёнов А.В. Весенний Турнир Архимеда. Олимпиада для 5–6 классов. Задания с решениями, технология проведения. - М.: МЦНМО, 2003. - 128 с.
7. Бугулов Е.А., Толасов Б.А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. - Орджоникидзе, 1962. - 226 с.
8. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. - М.: Бюро Квантум, 2007. — 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып 100. Приложение к журналу «Квант» № 2/2007.)
9. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М.: Наука, 1969
10. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. — Челябинск: Взгляд, 2005. — 271 с. — (Нестандартные задачи по математике).
11. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. - Челябинск: «Взгляд», 2004. — 448 с.
12. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. - М.: Просвещение, 1986. — 303с.
13. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки . - Киров, "Аса", 1994. - 272 с.
14. Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004. — 560 с.
15. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика. -М.: Бюро Квантум, 2006. — 128с. (Библиотечка «Квант». Вып. 97. Приложение к журналу «Квант» № 5/2006.)
16. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О. Бугаенко. - 4-е изд., стереотип. - М.: МЦНМО, 2008. - 96 с.
17. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. - М., МЦНМО, 2011.
18. Коннова Е.Г.; под ред. Ф.Ф.Лысенко. Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад.: 5-8 класс. Ч. 1.: учебно-методическое пособие. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2009
19. Коннова Е.Г.; под ред. Ф.Ф.Лысенко. Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад.: 6-9 класс. Ч. 2.: учебно-методическое пособие. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2009
20. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. - М., ГИФМЛ, 1958.
21. Линдгрэн Г. Занимательные задачи на разрезание. - М.: Мир, 1977.
22. Пойа Д. Как решать задачу. - М.: Учпедгиз, 1961.
23. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - М.: Наука, 1975.
24. Севрюков П.Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / П.Ф. Севрюков. — Изд. 2-е. — М. : Илекса ; Народное образование ; Ставрополь : Сервисшкола, 2009. - 112 с.
25. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? - М.: Мир, 1985.
26. Спивак А.В. Математический кружок. 6-7 класс. - М.: Посев, 2003

27. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы 8-е изд., испр. и доп. — М.: Айрис-пресс, 2009. — 256 с: ил. — (Школьные олимпиады).
28. Фарков А.В. Математические олимпиады: методика подготовки 5-8 классы. — М.: ВАКО, 2012.
29. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Яценко И.В. Московские математические олимпиады 1993—2005 г./ Под ред. В.М. Тихомирова. - М.: МЦНМО, 2006.—456 с.
30. Шеховцов В.А. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности. - Волгоград: Учитель, 2009. - 99 с.
31. Яценко И.В. Приглашение на математический праздник. - М., МЦНМО, 2005. — 104 с.
32. Интернет-ресурсы:
 - Олимпиады для школьников olimpiada.ru/
 - Всероссийская олимпиада по математике math.rusolymp.ru/
 - Московская математическая олимпиада школьников olympiads.mccme.ru/mmo/
 - Санкт-Петербургские математические олимпиады www.pdmi.ras.ru/~olymp/
 - Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников www.turgor.ru
 - Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования www.mccme.ru/
 - Задачная база олимпиадных задач zaba.ru www.problems.ru/

Нормативно-правовые документы

1. Федеральный закон от 29.12.2012г. №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями).
2. Федеральный закон от 13.07.2020 №189-ФЗ «О государственном (муниципальном) социальном заказе на оказание государственных (муниципальных) услуг в социальной сфере».
3. Распоряжение Правительства РФ от 1 июля 2025 г. №1745-р «О внесении изменений в Концепцию развития дополнительного образования детей до 2030 года»
4. Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 N 2506-р «Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации» (В редакции Распоряжения Правительства Российской Федерации от 08.10.2020 № 2604-р)
5. Распоряжение Правительства РФ от 29.05.2015г. №996-р «Об утверждении Стратегии развития воспитания в Российской Федерации до 2025 года».
6. Приказ Министерства просвещения РФ от 27.07.2022 г. №629 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам».
7. Письмо Министерства образования и науки РФ от 18.11.2015г. №09 3242 «О направлении информации» (вместе с «Методическими 1 рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (включая разноуровневые программы).
8. Постановление Главного государственного санитарного врача от 28.09.2020г. №28 «Об утверждении санитарных правил СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи».
9. Постановление Главного государственного санитарного врача от 28.01.2021г. №2 «Об утверждении санитарных правил и норм СП 1.2.3685-21 «Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания».

10. Постановление Правительства Ярославской области от 17.07.2018 №527-п (в редакции постановления Правительства области от 24.04.2024 №1081-п) — «Концепция персонифицированного дополнительного образования детей в Ярославской области»
11. План работы по реализации Концепции развития дополнительного образования детей до 2030 года, II этап (2025–2030 годы) в Ярославской области

РЕЦЕНЗИЯ

на дополнительную общеобразовательную программу –
дополнительная общеразвивающая программа
естественнонаучной направленности
«Стратегии решения олимпиадных задач по математике»,
автор-составитель - педагог дополнительного образования
ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа»
Каленова Анастасия Андреевна

Дополнительная общеобразовательная программа – дополнительная общеразвивающая программа «Стратегии решения олимпиадных математических задач» реализуется в течение 4 лет. Программа ориентирована на интересующихся математикой обучающихся 11 – 14 лет (5 – 8 классов) общеобразовательных учреждений г. Ярославля и Ярославской области.

Программа представлена в утвержденном виде (принята на заседании педагогического совета и утверждена директором учреждения), что подтверждает её официальный статус, также дополнительно представлены сведения о результативности. Вся вышеизложенная информация опубликована дополнительно на сайте учреждения, что соответствует требованию о доступности информации.

Содержание и структура программы полностью соответствует федеральным требованиям к дополнительным общеобразовательным программам (в соответствии с Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» и рекомендациями Минпросвещения РФ). Она ориентирована на естественнонаучную направленность, интегрирует элементы ФГОС основного общего образования и способствует развитию ключевых компетенций, таких как логическое мышление, креативность и навыки решения нестандартных задач. Модификация на основе дополнительной общеобразовательной – дополнительной общеразвивающей программы «Методы решения олимпиадных задач по математике», (автор - Богомолов Юрий Викторович, доцент кафедры дискретного анализа ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова, к.ф.-м.н.) добавляет к строгому научному содержанию творческий подход в обучении, делая её актуальной для углубленного изучения математики в современных реалиях.

Планируемые результаты, условия реализации и формы аттестации сформулированы в программе четко и целесообразно. Цель программы — развитие устойчивого интереса к математике через решение олимпиадных задач — подкреплена личностными, метапредметными и предметными задачами. Учебно-тематический план на 4 года (288 часов) с распределением по теоретическим и практическим занятиям, а также формы аттестации (мини-олимпиады, контрольные работы, математические соревнования) обеспечивают последовательное освоение материала. Условия (очная форма, группы по 15–17 человек, использование ИКТ и дистанционных технологий) учитывают

возрастные особенности и санитарные нормы, что делает программу реалистичной и эффективной.

Программа включает целесообразные оценочные и методические материалы. Разделы с примерами задач, мини-олимпиадами демонстрируют разнообразие методик и вариативность обучения: от игр и соревнований для 5 класса до научных дискуссий для старших. Воспитательный компонент (социальное самоопределение, командная работа, исторические справки о математиках) интегрирован органично, способствуя всестороннему развитию. Методические приемы, такие как «восходящая спираль» и чередование теории с практикой, обеспечивают мотивацию и прогресс.

Сведения о результативности (предполагаемые в полном пакете документов) тесно связаны с задачами и формами аттестации. Программа ориентирована на подготовку к олимпиадам, что подтверждается фокусом на нестандартные задачи, выходящие за рамки школьной программы (комбинаторика, теория графов, логика). Показатели эффективности, такие как участие в региональных и всероссийских соревнованиях, напрямую вытекают из задач, а формы аттестации (проверочные работы, мини-олимпиады) позволяют отслеживать прогресс.

Программа развивает навыки, выходящие за школьный курс, что способствует успеху в олимпиадах и формированию математической культуры. Ожидаемые результаты (овладение терминологией, нестандартным мышлением, командной работой) подкреплены практическими примерами задач, демонстрирующими рост от игр к исследовательской деятельности. Наконец, в программе присутствует система оценки качества образовательных результатов: входной и итоговый контроль, проверочные работы из двух уровней сложности, анализ задач соревнований. Это позволяет объективно измерять достижения и корректировать процесс, обеспечивая индивидуальный подход.

Как специалист в области математического образования с многолетним опытом работы в вузе, я высоко оцениваю качество и актуальность данной программы, которая гармонично сочетает в себе инновационные подходы к развитию математического мышления у школьников 5–8 классов, а также, не только углубляет знания, но и вдохновляет детей на творчество и саморазвитие. Она полностью соответствует духу конкурса «Сердце отдаю детям», подчеркивая преданность педагога делу воспитания подрастающего поколения.

Рецензент:

кандидат технических наук,
доцент кафедры вычислительных и
программных систем
ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
член жюри и методкомиссии
заключительного этапа
Всероссийской олимпиады
школьников по математике
и по информатике



С. Г. Волченков

**Методические рекомендации к разделам учебно-тематического плана дополнительной
общеразвивающей программы
«Стратегии решения олимпиадных задач по математике»**

1. Содержание учебно-тематического плана первого года обучения

Вводное занятие. Входной контроль.

РАЗДЕЛ 1. Общие принципы решения математических задач

Обучающиеся знакомятся с основными (общими) принципами решения математических задач, осознают необходимость обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. В ходе лекционных занятий обучающиеся осваивают основные логические схемы рассуждения, закрепляя их при решении практических задач с устным изложением решений.

Общие принципы решения задач иллюстрируются при решении логических практических задач на работу с истинными и ложными высказываниями, утверждениями.

РАЗДЕЛ 2. Множества

На занятии обучающиеся учатся различать и грамотно формулировать изученные теоретические понятия: множество, числовое множество, подмножество; правильно пользоваться математической терминологией и символикой для совершения операций над множествами: пересечение, объединение, разность; проводить несложные систематизации; приводить примеры различных множеств и подмножеств, правильно проводить логические рассуждения. Рассматриваются олимпиадные задачи, в решении которых используется диаграмма Эйлера. Совместно с учащимися выводится формула включения/исключения.

РАЗДЕЛ 3. Элементарные логические рассуждения

В теме происходит ознакомление с понятиями «логика», «логическая задача», «мышление», выделяется типология логических задач и основные способы их решения. Кроме этого, можно познакомиться с основными понятиями направления «математики без формул» - математической логики, узнать о создателях этой науки. Обучающиеся научатся решать задачи, выявляя в них причину и делая логический вывод о следствии. Основное внимание уделяется рассмотрению логических высказываний и построению отрицательных выражений, работать с истинными и ложными утверждениями.

РАЗДЕЛ 4. Логические и иные задачи

Среди задач на сообразительность особый интерес представляют логические задачи. Если для решения задачи требуется лишь логически мыслить и совсем не нужно производить арифметические выкладки, то такую задачу обычно называют логической. При решении подобных задач решающую роль играет правильное построение цепочки точных, иногда очень точных рассуждений.

На первом этапе целесообразно рассмотреть три широко распространенных типа логических задач:

3. Задачи, в которых на основании серии посылок, сообщающих те или иные сведения о действующих лицах, требуется сделать определенные выводы.

4. Задачи о «мудрецах».

5. Задачи о лжецах и тех, кто всегда говорит правду.

В данной теме рассматриваются разные способы решения логических задач и разнообразие приемов. Каждый из них имеет свою область применения. Решение логических задач развивает способность выделять существенное, самостоятельно подходить к обобщениям.

При решении логических задач дети научатся пользоваться различными методами:

- метод «здравых рассуждений»;
- с помощью таблиц;
- с помощью алгебры высказываний;
- построением графов.

Также в данной теме рассматриваются лингвистические задачи, ребусы и задачи на переливание и взвешивание.

Все они не требуют сложных арифметических действий, а направлены на развитие логического аппарата школьников.

РАЗДЕЛ 5. Четность и нечетность

Изучаются простейшие свойства делимости (на примере делимости на 2), понятие четности рассматривается на наглядных примерах (как способность к разбиению на пары, возможность чередования элементов). Обсуждаются свойства четных и нечетных чисел (сумма двух чисел одинаковой четности четна, сумма двух чисел разной четности нечетна, произведение четно тогда и только тогда, когда четным является один из множителей; переход к более сложным свойствам – четность или нечетность суммы нечетного количества нечетных слагаемых, обобщенные понятия – числа одинаковой и разной четности).

Знание свойств закрепляется при решении задач на соответствия, на разбиения на пары, на чередования. Разбираются простейшие задачи на раскраску, на разбиение чисел. В ходе решения и обсуждения задач закрепляется понимание разницы между частными и общими случаями, примером и доказательством.

Задачи, в которых используется понятие четности встречаются очень часто. Поэтому желательно познакомить обучающихся с подходами к решению этих задач. Задачи естественным образом разбиваются на три цикла:

Разбиение на пары.

Если предметы разбиты на пары, то их четное число. Следовательно, если из нечетного числа предметов образовано несколько пар, то, по крайней мере, один предмет остался без пары. Для решения таких задач нужно в каждом случае увидеть, что именно и на какие пары разбивается.

Чередование.

Если из предметов двух сортов образована цепочка, в которой соседние предметы разных сортов, то на всех четных местах стоят предметы одного сорта, а на всех нечетных – другого. Отсюда вывод: предметов одного сорта на один больше, чем предметов другого сорта в случае, когда длина цепочки нечетна и предметов обоих сортов поровну, тогда длина цепочки четна.

Чет – нечет.

Решение задач основано на простом наблюдении: сумма четного числа нечетных чисел – четна. Обобщение этого факта: четность суммы нескольких чисел зависит лишь от четности числа нечетных слагаемых: если количество нечетных слагаемых (не)четно, то и сумма – (не)четна.

РАЗДЕЛ 6. Делимость

В ходе занятий по данной теме обучающиеся исследуют основные свойства делимости (арифметические свойства делимости на одно число – сумма и разность чисел одинаковой одномодульной делимости, произведение, в котором один из множителей делится на данное число), закрепляется навык поиска делителей натурального числа, исследуются основные свойства простых и составных чисел, делимости на простое число.

При решении задач развиваются навыки поиска общих делителей чисел, приобретаются умения использования разложения на простые множители для анализа делимости чисел (поиска делителей, нахождения общих делителей, общих кратных, НОД и НОК). Обучающиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их

использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители.

РАЗДЕЛ 7. Начала комбинаторики

Обучающимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения.

Особое внимание уделяется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы, что закрепляется при решении практических задач.

РАЗДЕЛ 8. Введение в теорию графов

Обсуждается эффективность представления связанной с задачей системы в схематической форме с помощью графов. На примерах иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей.

РАЗДЕЛ 9. Введение в геометрию

Рассматриваются простейшие геометрические фигуры (треугольник, прямоугольник, квадрат) и их свойства. Решаются задачи на разрезание фигур, задачи, в которых используется в решении метод раскраски, отдельно уделяется внимание разверткам объемных фигур.

Проблемой, с которой сталкиваются и дети, и учителя, является то, что обучающиеся не «видят пространства». Им трудно увидеть видимые и невидимые линии, представлять, из каких на самом деле фигур состоит тот или иной многогранник. Часто, изображая пирамиду, с основанием - квадрат, на рисунке появляется именно квадрат, а не его изображение. Всем известно, что в геометрии правильно сделанный рисунок – половина успеха в решении задачи. Возникает проблема, неправильно делается рисунок - задача не решается. Поэтому, целью занятий является, научить обучающихся «видению пространства», изображению пространственных фигур, знанию основных элементов и умению пользоваться формулами для расчета площадей и объемов на основе уже имеющихся знаний.

Задачами на разрезание увлекались многие ученые с древнейших времен. Решения многих задач на разрезание были найдены еще с древними греками и китайцами. Геометры всерьез занялись решением задач на разрезание фигур на наименьшее число частей и последующее составление из них той или иной новой фигуры лишь в XX веке, прежде всего, потому, что универсального метода решения таких задач не существует и каждый, кто берется за их решение, может в полной мере проявить свою смекалку, интуицию и способность к творческому мышлению. Учитывая, что здесь не требуется глубокое знание геометрии, любители могут иногда даже превзойти профессионалов-математиков.

Задачи на разрезание помогают как можно раньше формировать геометрические представления у школьников на разнообразном материале. При решении таких задач возникает ощущение красоты, закона и порядка в природе.

На первом этапе рекомендуется рассмотреть задачи на клетчатой бумаге. Задачи, в которых разрезание фигур (в основном это квадраты и прямоугольники) идет по сторонам клеток.

Далее могут рассматриваться задачи, связанные с фигурами-пентамино. Пентамино́, изначально, (от др.-греч. πέντα пять, и домино) — пятиклеточные полимино, то есть плоские фигуры, каждая из которых состоит из пяти одинаковых квадратов, соединённых между собой сторонами («ходом ладьи»). Сегодня пентамино понимается более широко – плоская фигура, составленная из плиток.

Задачи разбиения плоскости, в которых нужно находить сплошные разбиения прямоугольников на плитки прямоугольной формы, задачи на составление паркетов, задачи

о наиболее плотной укладке фигур в прямоугольнике или квадрате, задачи, в которых одна фигура разрезается на части, из которых составляется другая фигура.

РАЗДЕЛ 10. Основы теории игр

На занятиях рассматриваются так называемые «конечные игры с полной информацией», теория которых проста и доступна учащимся 5 класса. На занимательном материале обучающиеся знакомятся с такими важными понятиями теории игр, как «стратегия» и «выигрышная стратегия», а также на простом и наглядном примере «изоморфизма игр» - с важнейшим для всей математики понятием изоморфизм.

Вводится понятие симметричной стратегии (на простейших примерах), при этом различные виды симметрии рассматриваются как в прямом смысле (в игровых задачах на клетчатом поле), так и в переносном (в виде дополнения объектов до определенного количества).

Поиск выигрышной стратегии требует настойчивости и упорства в достижении поставленной цели, развивает логические, комбинаторные и вычислительные способности учащихся.

Первый класс игр – игры-шутки. Это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники. Игры-шутки позволяют снять напряжение и усталость, дают школьникам возможность переключиться от напряженной творческой работы. Целесообразно предлагать их по одной после разбора трудного материала. Полезно перед решением, дать школьникам возможность поиграть друг с другом.

Задачи – игры весьма содержательны. При изложении их решения, необходимо, во-первых, грамотно сформулировать стратегию, а во-вторых, доказать, что она, действительно, ведет к выигрышу. Поэтому, задачи-игры чрезвычайно полезны для развития речевой математической культуры и четкого понимания того, что значит решить задачу.

РАЗДЕЛ 11. Принцип Дирихле

Обучающиеся получают представление о простом и обобщенном принципе Дирихле, отрабатывают умение преобразовывать интуитивные предпосылки в форму строгого математического доказательства.

При решении многих задач используются сходные между собой приемы рассуждений. Очевидно, что если в каждую клетку разрешается посадить не более одного зайца, то разместить 6 зайцев в 5-ти клетках не удастся и вообще, ни для какого натурального n не удастся разместить $n + 1$ зайцев в n клетках. Можно сказать иначе: если в n клетках находится $n + 1$ зайцев, то найдется клетка, в которой сидит не менее двух зайцев.

Сформулированное выше утверждение о зайцах-клетках имеет следующий математический смысл: при отображении множества A , содержащего $n + 1$ элементов в множество B , содержащее n элементов, найдутся два элемента множества A , имеющие один и тот же образ. Это утверждение называется принципом Дирихле. Принцип Дирихле, несмотря на всю простоту и очевидность очень часто используется при доказательстве теорем и решении задач.

При разборе задач полезно четко разделять доказательство на поиск «зайцев» и «клеток», на дополнительные соображения и, наконец, на применение принципа Дирихле.

РАЗДЕЛ 12. Математические соревнования

Обучающиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

По окончании цикла занятий проводится обобщающее занятие, в рамках которого проходит повторение изученного материала, а также проводится один из видов математического соревнования. Это может быть математический аукцион, математическая регата, игра по станциям, математический хоккей, математическое лото, мозговая атака и другие формы работы.

Также на последних занятиях проводятся олимпиады (как правило, на примере задач из школьных олимпиад следующего класса), по результатам которых каждый ребенок оценивается индивидуально, выявляются его «слабые места» в знаниях и даются рекомендации для самостоятельной работы на летних каникулах.

Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа

По окончании цикла занятий проводится обобщающее занятие, в рамках которого проходит повторение изученного материала, а также проводится один из видов математического соревнования. Это может быть математический аукцион, математическая регата, игра по станциям, математический хоккей, математическое лото, мозговая атака и другие формы работы.

Также на последних занятиях проводятся олимпиады (как правило, на примере задач из школьных олимпиад следующего класса), по результатам которых каждый учащийся оценивается индивидуально, выявляются его «слабые места» в знаниях и даются рекомендации для самостоятельной работы на летних каникулах.

2. Содержание учебно-тематического плана второго года обучения

РАЗДЕЛ 1. Общие принципы решения математических задач

Повторяются и обсуждаются общие принципы решения математических задач, подчеркивается необходимость обоснования математических утверждений, актуализируются понятия частного и общего случая, закрепляется понимание различий между доказательством и проверкой на частных примерах, обучающиеся приобретают опыт мыслительного, образного и предметно-манипулятивного конструирования. Формируются навыки работы с основными логическими конструкциями, такими как следствие, равносильность, необходимость, достаточность, существование, всеобщность. Логические понятия, связки, схемы рассуждения, общие принципы решения задач и доказательств, полученные на лекционных занятиях, закрепляются при решении практических задач с устным или письменным изложением решений. Уделяется внимание задачам с неопределенным ответом типа «можно ли...», отмечается принципиальное различие схемы доказательства для каждого из вариантов ответов. На практических занятиях предлагаются задачи на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез, на конструирование примеров и контрпримеров, полный перебор комбинаций.

РАЗДЕЛ 2. Введение в оптимизационные задачи

Рассматриваются примеры задач на построение точных оценок (задачи типа «оценка плюс пример» – синтез логического обоснования и конструирования). Обязательно делается акцент, что решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4-5 баллов, второй шаг – в 2-3 балла. Тем самым, не указав при решении задачи на олимпиаде тот или иной шаг, можно потерять баллы.

РАЗДЕЛ 3. Турниры и задачи на логику

Разбор логических задач начался в 5 классе, задачи 6 класса являются продолжением данной темы, но уровень сложности задач, естественно, повышается. Задачи о спортивных соревнованиях регулярно появляются на математических олимпиадах. Задачи о турнирах, как правило, наглядны по формулировке, и их решение требует сообразительности, а не каких-то специальных знаний.

РАЗДЕЛ 4. Геометрия

Обучающиеся кратко, во многом на интуитивном уровне, знакомятся с некоторыми геометрическими понятиями и свойствами. При решении задач на разрезание дети по большей части работают самостоятельно, задачи предлагаются в порядке последовательного усложнения. Задачи на разрезание помогают как можно раньше формировать геометрические представления у школьников на разнообразном материале. При решении таких задач возникает ощущение красоты, закона и порядка в природе.

Неравенство треугольника иллюстрируется интуитивной геометрической интерпретацией («путь по прямой короче, чем по ломаной (не по прямой)»). Возможно решение оптимизационных задач с использованием неравенства треугольника.

РАЗДЕЛ 5. Делимость

Повторяются основные свойства делимости (сумма и разность чисел одинаковой одномодульной делимости, произведение, в котором один из множителей делится на данное число), свойства простых и составных чисел, делимости на простое число. Развиваются навыки поиска общих делителей чисел, приобретаются умения использования разложения на простые множители для анализа делимости чисел (поиска делителей, количества делителей, нахождения общих делителей, общих кратных, НОД и НОК).

Обосновывается основная теорема арифметики о существовании и единственности разложения числа на простые множители, демонстрируется ее применение при решении задач на доказательство. Осваивается умение обоснования признаков делимости на различные числа, формируются навыки поиска контрпримеров к неверным признакам. Полученные навыки закрепляются при решении практических задач.

РАЗДЕЛ 6. Арифметика остатков

Тема является чрезвычайно важной, хотя и может показаться несколько скучной. Для первого этапа работы вполне достаточно тех теоретических сведений, которые имеют учащиеся 6 класса. В процессе работы теоретическая база может быть несколько пополнена, однако увлекаться теорией не следует.

При решении задач выделяются те свойства целых чисел, которые помогают добраться до ответа. Далее актуализируются определения взаимно простых чисел, наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, определение деления одного целого числа на натуральное число с остатком. Обучающиеся закрепляют навыки деления чисел с остатками, выявляют зависимость между остатками и делимостью чисел, рассматривают задачи на представление целого числа через неполное частное и остаток. В ходе занятия иллюстрируются основные свойства остатков (остатки сумм, разностей, произведений). На примерах разбирается алгоритм построения таблиц сложения и умножения остатков, учащиеся самостоятельно выполняют аналогичные построения для других модулей.

Задачи в основном направлены на нахождение остатков от деления чисел с использованием арифметических свойств остатков, а также на доказательство делимости чисел с помощью подсчета остатков от деления слагаемых и множителей.

РАЗДЕЛ 7. Простые и составные числа

Повторяются общие свойства делимости, обсуждаются специфические свойства делимости на простое число, а также общие свойства простых чисел. На примере доказательства теоремы Евклида о бесконечности множества простых чисел иллюстрируется метод доказательства от противного, а также возможность неконструктивных доказательств. При выполнении практических заданий у учащихся формируются умения и навыки эффективного поиска простых чисел, проверки числа на простоту.

РАЗДЕЛ 8. Начала комбинаторики

Обучающимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения.

Особое внимание уделяется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы, что закрепляется при решении практических задач. Способ подсчета перестановок предварительно демонстрируется на простейших задачах с использованием полного перебора, после чего на задачах с большим количеством элементов обсуждается неконструктивный способ подсчета количества комбинаций, в результате выводится общая формула подсчета количества перестановок, навык использования которой закрепляется при решении задач.

РАЗДЕЛ 9. Принцип Дирихле

Актуализируется представление о простом и обобщенном принципе Дирихле, повторяются общие методы и схемы доказательств: доказательство от противного, оценка и пример; обсуждаются возможности неконструктивных доказательств существования объектов.

При решении практических задач внимание обучающихся обращается на различные интерпретации принципа Дирихле в задачах с принципиально различными объектами. Обсуждаются некоторые простейшие свойства числовых неравенств, знание которых и умение их применять закрепляются при самостоятельном решении практических задач. Общая схема доказательства с использованием принципа Дирихле иллюстрируется рассмотрением задач из элементарной теории чисел и комбинаторики. Геометрическая интерпретация принципа Дирихле вводится через интуитивные представления о покрытии отрезков и фигур, о свойствах мер (длин отрезков, площадей плоских фигур и поверхностей объемных тел).

РАЗДЕЛ 10. Введение в теорию графов

Обсуждается эффективность представления связанной с задачей системы в схематической форме с помощью графов. На примерах иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей.

Вводятся основные определения теории графов (вершины, ребра, смежность, инцидентность, путь). Введенные понятия развернуто иллюстрируются на конкретных примерах, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов.

РАЗДЕЛ 11. Математические соревнования

Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа

По окончании цикла занятий проводится обобщающее занятие, в рамках которого проходит повторение изученного материала, а также проводится один из видов математического соревнования. Это может быть математический аукцион, математическая регата, игра по станциям, математический хоккей, математическое лото, мозговая атака и другие формы работы.

Также на последних занятиях проводятся олимпиады (как правило, на примере задач из школьных олимпиад следующего класса), по результатам которых каждый учащийся оценивается индивидуально, выявляются его «слабые места» в знаниях и даются рекомендации для самостоятельной работы на летних каникулах.

3. Содержание учебно-тематического плана третьего года обучения

РАЗДЕЛ 1. Математическая логика

Учитывая значимую роль логических задач в развитии мышления и использование их в олимпиадах разного уровня, то продолжается разбор разного рода таких задач, уровень сложности которых, естественно, соответствуют 7 классу. Обучающиеся оттачивают навык на практических занятиях, учатся составлять самостоятельно таблицы истинности. Также дети знакомятся с новыми принципами - принцип исключенного третьего и принцип включения-исключения. Формула включения-исключения для двух множеств рассматривается с учащимися в 5 классе при изучении множеств. Данная формула рассматривается наглядно с помощью диаграммы Эйлера, тем самым осуществляя пропедевтику принципа включения-исключения для n -множеств. На третьем году обучения данный принцип раскрывается в полной форме, решаются олимпиадные задачи, соответствующие возрастному уровню.

РАЗДЕЛ 2. Текстовые задачи

Рассматриваются способы решения нестандартных задач из олимпиад на проценты и части, смеси и сплавы, работу и движение. Темы «Проценты» и «Отношения (части)» изучаются непродолжительное время в школьном курсе, но задания по ним включаются в материалы, как и итоговой аттестации за курс основной школы, в КИМы и ЕГЭ, так и в олимпиады любого уровня. Понимание процентов и отношений, умение производить процентные расчеты в современной жизни необходимы каждому человеку.

РАЗДЕЛ 3. Теория чисел

Вводится общее понятие систем счисления и их разновидностей. Особое внимание уделяется десятичной системе счисления, для которой рассматривается ряд признаков делимости (с доказательствами). Формулируются признаки делимости на 2^n , 5^n и др. Навыки применения признаков делимости закрепляются в ходе решения задач. Повторяется алгоритм Евклида, так как он часто встречается в задачах на математических олимпиадах.

В ходе изучения темы обобщается понятие остатка, фактически трансформируясь в понятие сравнимости по модулю. Свойства сравнимости по модулю как разбираются с преподавателем, так и предлагаются к самостоятельному доказательству (под контролем преподавателя, с разбором трудных случаев). При обсуждении решения практических задач демонстрируется эффективность аппарата сравнений по модулю для решения и оформления решений задач, при решении которых закрепляются навыки применения свойств сравнений по модулю.

РАЗДЕЛ 4. Инвариант

Обучающиеся знакомятся с понятием инварианта на простейших примерах (подсчет двумя способами), после чего данное понятие расширяется. Вырабатываются умения поиска инвариантов в изменяющейся системе, выбора из них необходимого для решения поставленной задачи. При решении задач на исследование инвариантов, связанных с раскраской, учащиеся знакомятся с идеей раскрашивания (нумерации) некоторых объектов для выявления их свойств и закономерностей, знакомятся с некоторыми стандартными способами раскрасок и приобрести опыт применения этой идеи в различных ситуациях. Задачи на разрезание помогают как можно раньше формировать геометрические представления у детей на разнообразном материале. При решении таких задач возникает ощущение красоты, закона и порядка в природе.

РАЗДЕЛ 5. Комбинаторика

С обучающимися обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций (по большей части связанных с подсчетом количества подмножеств или наборов элементов некоторого конечного множества), способы подсчета

комбинаций без их непосредственного нахождения. Способ подсчета упорядоченных наборов (кортежей) и неупорядоченных наборов (подмножеств) предварительно демонстрируется на простейших задачах с использованием полного перебора, после чего на задачах с большим количеством элементов обсуждается неконструктивный способ подсчета количества комбинаций, в результате выводятся общие формулы подсчета количества комбинаций указанного вида, навык использования которых закрепляется при решении задач.

Обучающиеся самостоятельно могут сформировать Бином Ньютона при грамотном наставничестве педагога. Особое внимание уделяется комбинаторному доказательству свойств биномиальных коэффициентов, однако демонстрируется и способ доказательства с помощью преобразования выражающих число сочетаний алгебраических выражений (детям предлагается сделать выкладки самостоятельно).

РАЗДЕЛ 6. Теория графов

В данном разделе изучаются виды графов. Обучающиеся закрепляют умения применять графовые модели в анализе и решении задач, иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, в том числе ориентированного, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей. Рассматриваются конкретные примеры задач, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов. Вводится понятие изоморфизма графов, особое внимание уделяется топологическим свойствам графа. Рассматриваются деревья и их свойства. Практические задачи направлены на закрепление знаний свойств деревьев и плоских графов, а также навыков применения данных свойств. Формулируется и доказывается теорема Эйлера.

РАЗДЕЛ 7. Геометрия

С использованием изученных свойств алгебраических неравенств обучающиеся выводят ряд геометрических неравенств. В качестве «геометрической основы» для этого предварительно используется неравенство треугольника, после чего с использованием свойств и метрических соотношений в треугольнике выводятся новые базовые неравенства, которые в дальнейшем используются при решении геометрических задач (геометрические неравенства, оптимизационные геометрические задачи).

Обсуждаются свойства движений и подобия, некоторые свойства обосновываются с помощью доказательств, для некоторых на данном этапе проводится только иллюстрация на примерах. Демонстрируется связь данных геометрических процессов с метрическими соотношениями и неравенствами в геометрических фигурах. Знание рассмотренных свойств закрепляется при решении задач.

Решаются геометрические задачи на листе в клеточку. Формулировки и решения этих задач отличаются от обычных задач из действующих учебников и задачников по геометрии и, в то же время, они не требуют дополнительных сведений, направлены именно на обобщающее повторение основного курса геометрии 7-9 классов, на его более глубокое освоение и понимание, выработку необходимых геометрических компетенций. Решение каждой предложенной задачи требует применения геометрических знаний в необычной ситуации, что позволяет проверить качество освоения геометрического материала готовность ученика использовать полученные знания и умения для решения нестандартных и исследовательских задач. Чаще всего в подобных упражнениях необходимо найти площадь фигуры. Решить такие задачи можно, вспомнив основные теоремы и свойства трапеции, треугольника, шестиугольника и т. д.

РАЗДЕЛ 8. Принцип математической индукции

При изучении метода математической индукции с обучающимися предварительно обсуждается возможность получения неверных выводов при осуществлении неполного перебора в задачах (иллюстрируется на конкретных примерах неверных гипотез, подтверждающихся для некоторого подмножества случаев). К общей схеме математической индукции обучающиеся подводятся через последовательное решение задачи с возрастающим параметром условия, при этом индуктивный переход первоначально производится непосредственно для каждого случая, после чего предлагается обоснование корректности перехода для произвольного текущего состояния.

Метод математической индукции иллюстрируется на примере задач из различных областей математики, а навык его использования закрепляется в ходе решения практических задач. На ранних этапах желательно рекомендовать детям проделывать несколько шагов индукции вручную для каждого значения параметра, после чего переходить к общему доказательству. Следует обратить внимание обучающихся на полноту доказательства базы индукции (в зависимости от утверждений, как которые производится ссылка в индуктивном переходе).

РАЗДЕЛ 9. Математические соревнования

РАЗДЕЛ 10. Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа

По окончании цикла занятий проводится обобщающее занятие, в рамках которого проходит повторение изученного материала, а также проводится один из видов математического соревнования, который наиболее подходит для организации работы со школьниками, занятыми во внеурочной деятельности. Это может быть математический аукцион, математическая регата, игра по станциям, математический хоккей, математическое лото, мозговая атака и другие формы работы.

Также на последних занятиях проводятся олимпиады (как правило, на примере задач из школьных олимпиад следующего класса), по результатам которых каждый учащийся оценивается индивидуально, выявляются его «слабые места» в знаниях и даются рекомендации для самостоятельной работы на летних каникулах.

4. Содержание учебно-тематического плана четвертого года обучения

РАЗДЕЛ 1. Математическая логика

Занятия четвертого года обучения начинаются с изучения раздела, направленного на решение логических задач. Такой подход помогает плавно погрузить детей в процесс обучения и восстановить тонус математического мышления после летних каникул. На занятиях решаются разнообразные логические задачи, в том числе задачи про турнир, математические игры, которые и встречаются на олимпиадах для восьмиклассников. Также обучающиеся вспоминают и продолжают решать задачи на принцип исключенного третьего и принцип включения-исключения.

РАЗДЕЛ 2. Теория чисел

Повторяются основные свойства делимости, сравнений по модулю, свойства простых и составных чисел. Обучающимся предлагаются задачи на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования простых или составных чисел с указанными ограничениями (например, бесконечность множества простых чисел определенного вида). Вводятся понятия квадратичного вычета и квадратичного невычета, формулируются и доказываются простейшие свойства.

Понятие мультипликативной функции вводится на примере функции Эйлера, для нее же доказываются основные свойства. Навыки вычисления функции Эйлера и применения обобщенной малой теоремы Ферма закрепляются учащимися в ходе решения практических задач.

С детьми разбираются общие методы решения диофантовых уравнений (линейные уравнения, метод спуска, разложение на множители, оценка), формируется навык анализа и решения линейных диофантовых уравнений. Особое внимание уделяется самостоятельному решению уравнений в целых числах, в ходе которого на практических задачах закрепляется знание свойств делимости, остатков, сравнений. В качестве формы контроля возможна организация личной или командной олимпиады на основе задач по данной тематике.

РАЗДЕЛ 3. Инвариант

Обучающиеся актуализируют представление об инварианте, после чего данное понятие расширяется как путем расширения сфер применимости, так и введением понятия полуинварианта. Вырабатываются умения поиска инвариантов и полуинвариантов в изменяющейся системе, выбора из них необходимого для решения поставленной задачи, подбора адекватного полуинварианта. В ходе изучения инвариантов и полуинвариантов повторяются основные понятия и свойства из элементарной теории чисел, комбинаторики, теории графов, геометрии. При решении задач на исследование инвариантов и полуинвариантов дети отрабатывают навыки выбора неизменяемых величин, некоторыми стандартными способами выбора инвариантов и полуинвариантов, приобретают опыт применения идеи инвариантов и полуинвариантов при решении задач из различных областей математики в различных ситуациях.

РАЗДЕЛ 4. Дискретная непрерывность

Обучающиеся знакомятся с функциями целого аргумента как процесса, развивающегося в дискретном времени. В качестве моделей, приводящих к понятию дискретного процесса, используются турниры (разбитые на игры и туры), игровые задачи на клетчатом поле (одномерном или двумерном), процессы на целочисленной прямой (блуждания). При этом формируется навык анализа дискретных процессов – принимаемых параметром значений, оценка минимального и максимального значения, множества значений параметра (функции).

Интуитивно вводится понятие дискретной непрерывности как близость значений функции (состояния процесса) при минимальных изменениях параметра (дискретного времени). Для процессов, характеризующихся свойством дискретной непрерывности, вводится дискретный аналог теоремы Больцано-Коши. Знание введенных понятий и идей, а также умение их использовать при анализе процессов закрепляется в ходе решения практических задач.

РАЗДЕЛ 5. Оптимизация

Обучающиеся повторяют свойства неравенств, используют их как этапы решения оптимизационных задач. В ходе построения точных оценок приобретается опыт конструирования (образного, мыслительного), закрепляется осознание потребности в синтезе конструктивного и аналитического доказательств (для реализации этого при решении задач особое внимание уделяется задачам вида «оценка плюс пример»).

Через решение практических задач дети подводятся к использованию принципа крайнего. Вводимый принцип рассуждений иллюстрируется на примерах из различных разделов математики (принцип крайнего в геометрии, в комбинаторной геометрии, в алгебре, в комбинаторике, в теории графов).

На практических примерах разбираются основные идеи поиска полуинварианта, анализа принимаемых им значений, применения его для построения точных оценок. При самостоятельном решении задач у обучающихся развиваются умения поиска полуинвариантов, выбора из них необходимого для данной ситуации и его использования при решении оптимизационных задач.

РАЗДЕЛ 6. Нестандартные уравнения и неравенства

Обучающиеся знакомятся с основными свойствами отношений предшествования и неравенств (транзитивность, антисимметричность, сложение и умножение неравенств). Свойства неравенств предварительно обсуждаются на примере числовых неравенств, после чего обобщаются и для алгебраических. На числовых неравенствах обязательно демонстрируется неприменимость некоторых операций к неравенствам (вычитание, деление неравенств). Знание свойств неравенств и умение их применять закрепляется в ходе решения практических задач.

Рассматриваются и отрабатываются при самостоятельном решении задач основные способы доказательства алгебраических неравенств (группировка, разложение на множители, выделение полного квадрата). Дети самостоятельно доказывают неравенства о средних для малого количества аргументов, после чего данные свойства обобщаются на случай произвольного количества аргументов, доказываются и обсуждаются с участием преподавателя. В ходе решения задач обучающиеся вырабатывают навыки выявления средних величин в алгебраическом выражении и использования неравенств о средних для доказательства алгебраических неравенств.

На простых примерах обучающиеся знакомятся с методом Штурма доказательства алгебраических неравенств, приобретают навык применения метода в ходе решения практических задач.

РАЗДЕЛ 7. Геометрия

На занятиях изучается новый метод геометрических точек. Задачи данного раздела помочь ребенку оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы, научить строить геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют условию $F(x) = 0$, $F(x) \leq 0$, $F(x) \geq 0$, научить обучающихся навыкам построения графиков с модулем и проведению преобразований с помощью изученных методов. Для решения остальных задач, как правило, теоретическая база в основном вводится на уроках геометрии в общеобразовательной школе, поэтому основное внимание уделяется самостоятельному решению практических задач на вычисление, построение, доказательство. Обсуждаются свойства движений, подобия, гомотетии. Демонстрируется связь данных геометрических процессов с метрическими соотношениями и неравенствами в геометрических фигурах. Отрабатываются технические навыки: последовательное вычисление углов в геометрических задачах, поиск цепочек подобий, равных углов и пропорциональных отрезков. Знание рассмотренных свойств и полученные навыки закрепляются при решении задач.

РАЗДЕЛ 8. Квадратный трехчлен

Закрепляются знания о квадратном трехчлене. Обсуждаются основные свойства, закрепляются навыки оперирования с квадратным трехчленом: выделения полного квадрата, поиска корней, разложения на множители. Навыки использования теоремы Виета закрепляются при решении практических задач на конструирование квадратных трехчленов с заданными свойствами.

Вводится понятие квадратичной функции. Обсуждается зависимость величины и расположения корней квадратного трехчлена от его коэффициентов, свойства иллюстрируются с помощью геометрической интерпретации (графического представления функции и зависимости вида графика от соотношения коэффициентов).

РАЗДЕЛ 9. Математические соревнования

РАЗДЕЛ 10. Итоговое занятие. Итоговая проверочная работа

По окончании цикла занятий проводится обобщающее занятие, в рамках которого проходит повторение изученного материала, а также проводится один из видов математического соревнования. Это может быть математический аукцион, математическая регата, игра по станциям, математический хоккей, математическое лото, мозговая атака и другие формы работы.

Также на последних занятиях проводятся олимпиады (как правило, на примере задач из школьных олимпиад следующего класса), по результатам которых каждый обучающийся оценивается индивидуально, выявляются его «слабые места» в знаниях и даются рекомендации для самостоятельной работы на летних каникулах.

Примеры математических задач**Первый год обучения****РАЗДЕЛ 1. Общие принципы решения математических задач**

Задача 1. Каждая точка числовой оси, координата которой – целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдётся цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа k имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на k .

Задача 2. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Задача 3. Каждый из голосующих на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии 10 кандидатов. На избирательном участке находится 11 урн. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит хотя бы один бюллетень и при всяком выборе 11 бюллетеней по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

Задача 4. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у россиян, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

Задача 5. Можно ли расположить 12 одинаковых монет вдоль стенок большой квадратной коробки так, чтобы вдоль каждой стенки лежало ровно:

- а) по 2 монеты;
- б) по 3 монеты;
- в) по 4 монеты;
- г) по 5 монет;
- д) по 6 монет;
- е) по 7 монет? Монеты можно класть друг на друга.

Задача 6. Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

Задача 7. Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого можно вырезать второй. Прав ли он?

Задача 8. Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений.

- а) Все простые числа — нечетные.
- б) Все прямоугольники являются квадратами.
- в) Каждое натуральное число либо простое, либо составное.
- г) Все четырехугольники, у которых все стороны равны, являются квадратами.

Задача 9. Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений.

- а) Все четырёхугольники, у которых все стороны равны, — квадраты.
- б) Через любые три точки плоскости можно провести прямую.
- в) Через любые три точки плоскости можно провести окружность.
- г) Все простые числа — нечётные.
- д) Если число делится на 2 и на 6, то оно делится и на 12.
- е) Если число a делится на 15 и на b , то оно делится и на $15b$.

РАЗДЕЛ 2. Множества

Задача 1. На стол бросили две салфетки 10 см х 10 см. Они покрыли площадь стола, равную 168. Какова площадь перекрытия?

Задача 2. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60%, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

Задача 3. В нашем классе 24 ученика. Все они хорошо провели зимние каникулы. 10 человек катались на лыжах, 16 ездили на каток, а 12 — лепили снеговиков. Сколько учеников смогли покататься и на лыжах, и на коньках, и слепить снеговика?

Задача 4. 9 моих друзей любят бананы, 8 — апельсины, а 7 — сливы, 5 — бананы и апельсины, 3 — бананы и сливы, 4 — апельсины и сливы, 2 — бананы, апельсины и сливы. Сколько у меня друзей?

Задача 5. В пионерском лагере «Дубки» в смене актива отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. 10 человек были и отличниками, и победителями олимпиад, 5 — отличниками и спортсменами, 8 — спортсменами и победителями олимпиад, 3 — и отличники, и спортсмены, и победители олимпиад.

РАЗДЕЛ 3. Элементарные логические рассуждения

Задача 1. Задача «Дело Брауна, Джонса и Смита». Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления:

Браун: 1. Я не преступник. 2. Джонс - тоже.

Джонс: 1. Браун не преступник. 2. Преступник - Смит.

Смит: 1. Преступник - Браун. 2. Я не преступник.

В процессе следствия было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий - один раз солгал и один раз - сказал правду. Кто совершил преступление?

Задача 2. Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

- «Кто испачкал скатерть?» — спросила бабушка.
- «Витя не ставил кляксу», — сказал Алеша. — «Это сделал Боря».
- «Ну, а ты, что скажешь?» - спросила бабушка Борю.
- «Это Витя поставил кляксу», — сказал Боря. — «А Алеша не пачкал скатерть».
- «Так я и знала, что вы друг на дружку сваливать будете», - рассердилась бабушка. — «Ну, а каков твой ответ?» - спросила она Витю.
- «Не сердись, бабуля! Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки», - сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух своих заявлений сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

Задача 3. Найди ложные общие утверждения и приведи для них контрпример. Сформулируй их отрицание с использованием оборота «Существует хотя бы один».

- 1) Все простые числа нечетны.
- 2) Все нечетные числа простые.
- 3) Любое число, кратное 9, кратно и 3.
- 4) Любое число, кратное 3, кратно и 9.
- 5) Каждое простое число имеет не больше двух делителей.
- 6) Всякое число, которое имеет не больше двух делителей, - простое.

РАЗДЕЛ 4. Логические и иные задачи

Задача 1. Задача о переправе козы, волка и капусты.

Через реку надо перевезти козу, волка и капусту. На лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Каким образом их можно перевезти, чтобы коза не съела капусту, а волк — козу.

Задача 2. Из восьми колец одно легче других. Каково число взвешиваний на чашечных весах для определения более легкого кольца?

Задача 3. Аня, Женя, Нина спросили, какие оценки им поставили за контрольную работу по математике. Учитель ответил: «Плохих оценок нет. У вас троих оценки разные. У Ани не «3». У Нины не «3» и не «5». Кто какую оценку получил?

- *Задача 4.* Три мудреца поспорили, кто из них самый умный и обратились к четвертому, чтобы он их рассудил. Судья сообщил мудрецам, что у него есть три белых колпака и два черных, после чего надел каждому колпак на голову так, чтобы каждый видел только колпаки двух других мудрецов. Мудрецам требовалось угадать цвет колпака на собственной голове. Через некоторое время один из мудрецов сообщил, что у него на голове белый колпак и выиграл состязание. Как он смог догадаться?
- *Задача 5.* Некогда перед судом предстали три островитянина, которых для конфиденциальности мы обозначим А, Б и В. Известно, что преступление совершил ровно один из них, но кто из них является рыцарями, а кто – лжецами, было неизвестно. - Б лжец. Но преступление совершил В, - заявил А. - А и В либо оба рыцари, либо оба лжецы, - сообщил суду Б. - Б говорит правду. «Но тем не менее он и совершил преступление», —сказал В. Поразмышляв недолго, судья не только сумел определить, кто есть кто, но и изобличить преступника. А вы сумеете это сделать?

РАЗДЕЛ 5. Четность и нечетность

- *Задача 1.* За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола чётно.
- *Задача 2.* На плоскости расположено 11 шестерёнок, соединённых в кольцо. Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно?
- *Задача 3.* Шахматный конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.
- *Задача 4.* Может ли прямая не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?
- *Задача 5.* На клетчатой бумаге нарисован замкнутый путь, идущий по линиям сетки. Может ли он иметь длину 1999? А длину 2000?
- *Задача 6.* Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90 каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.
- *Задача 7.* Из набора домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд по правилам?
- *Задача 8.* Пусть расположение шашек в предыдущей задаче симметрично относительно обеих диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

РАЗДЕЛ 6. Делимость

Задача 1. p и q - различные простые числа. Сколько делителей у числа а) pq ; б) p^2q ; в) p^2q^2 ; г*) p^nq^m ?

Задача 2. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

Задача 3. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится а) на 30; б) на 120.

Задача 4. Каково наименьшее натуральное n , такое, что $n!$ делится на 990?

Задача 5. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

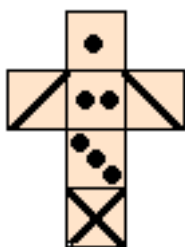
Задача 6. На затонувшей каравелле XIV века были найдены шесть мешков с золотыми монетами. В первых четырёх мешках оказалось по 60, 30, 20 и 15 золотых монет. Когда подсчитали монеты в оставшихся двух, кто-то заметил, что число монет в мешках составляет некую последовательность. Приняв это к сведению, смогли бы вы сказать, сколько монет в пятом и шестом мешках?

Задача 7. Известно, что $p > 3$ и p – простое число. Как вы думаете: а) будут ли чётными числа $p + 1$ и $p - 1$; б) будет ли хотя бы одно из них делиться на 3?

Задача 8. В государстве имеют хождение монеты в один золотой и в один грош, причём один золотой составляет 1001 грошей. Можно ли, имея 96 золотых, купить без сдачи несколько предметов по 97 грошей?

РАЗДЕЛ 7. Введение в геометрию

- *Задача 1.* Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части по линиям сетки так, чтобы в каждой из частей был кружок.
- *Задача 2.* На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 5*5 клеток. Придумайте, как разрезать его по линиям сетки на 7 различных прямоугольников.
- *Задача 3.* Выберите кубик, соответствующий данной развертке:



а)



б)



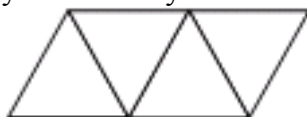
в)



г)



Задача 4. У Буратино была бумага, оклеенная с одной стороны полиэтиленом. Он сделал заготовку, изображенную на рисунке, чтобы склеить из нее пакет для молока. Лиса Алиса сказала, что может сделать другую заготовку и склеить такой же пакет. Какую?

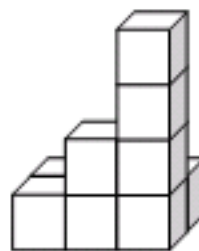


Задача 5. Изображенные на рисунке тела состоят из кубиков. Сколько кубиков в каждом из них?

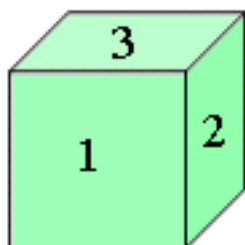
а)



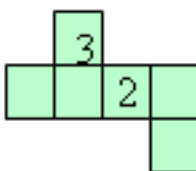
б)



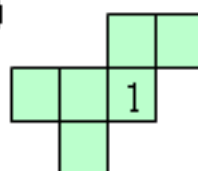
Задача 6. На видимых гранях куба проставлены числа 1, 2 и 3. А на развертках – два из названных чисел или одно. Расставьте на развертках куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы сумма чисел на противоположных гранях была равна 7.



а)

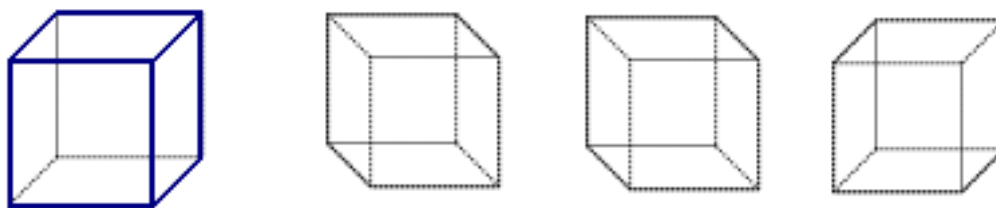


б)



Задача 7. Пунктирными линиями на рисунке обозначены невидимые ребра куба. Соответственно, сплошными линиями показаны видимые линии. Мы смотрели на куб справа сверху. На рисунках а, б, в, проведите сплошные линии так, чтобы куб был виден

- а) справа снизу;
- б) слева сверху;
- в) слева снизу.



Тема 8. Основы теории игр

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Двое по очереди ломают шоколадку 6×8 . За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 2. Имеется три кучки камней: в первой - 10, во второй - 15, в третьей - 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 3. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй.

Задача 4. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 5. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными - единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра - единица, то выиграл первый игрок, если двойка - то второй.

Задача 6. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число - разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 7. Дана клетчатая доска размерами а) 9×10 ; б) 10×12 ; в) 9×11 . За ход разрешается вычеркнуть любую горизонталь или любую вертикаль, если в ней к моменту хода есть хотя бы одна не вычеркнутая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 8. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 9. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 10. Имеется две кучки, камней - по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает, тот, кому нечего брать.

Задача 11. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 12. Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 13. а) Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски. Очередным ходом надо побить хотя бы одну небитую клетку. Слон бьет и клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. б) *Та же игра, но с ладьями.

Задача 14. Дана клетчатая доска 10×10 . За ход разрешается покрыть любые 2 соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 15. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

Задача 16. Имеются две кучки камней: в одной - 30, в другой - 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Задача 17. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 18. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Задача 19. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10 . За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1 .

Задача 20. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9 . Начинаящий ставит крестики, его соперник - нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов — это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше - очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает.

Тема 9. Принцип Дирихле

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. В магазин привезли 25 ящиков яблок трех сортов. В каждом ящике лежат яблоки одного сорта. Продавец утверждает, что у него нет девяти ящиков с яблоками одного сорта. Не ошибся ли он?

Задача 2. В поход пошли 20 туристов. Самому старшему из них 35 лет, а самому младшему: а) 16 лет б) 17 лет. Верно ли, что среди туристов есть одногодки?

Задача 3. В школе учатся 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них отмечают день рождения в один и тот же день.

Задача 4. Сможете ли вы разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

Задача 5. Занятия математического кружка проходят в девяти аудиториях. Среди прочих, на эти занятия приходят 19 учеников из одной и той же школы.

а) Докажите, что как их не пересаживай, хотя бы в одной аудитории окажется не меньше трех таких школьников.

б) Верно ли, что в какой-нибудь аудитории обязательно окажется ровно три таких школьника?

Задача 6. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Задача 7. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

Задача 8. Каждая грань куба окрашена в черный или белый цвет. Докажите, что найдутся две грани с общим ребром, которые одинаково окрашены.

Задача 9. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Задача 10. Клетчатая бумага покрашена в 8 разных цветов (каждая клетка - целиком одного цвета). Докажите, что на эту бумагу можно положить фигурку, изображенная на рисунке, так, чтобы она покрывала две клетки одного цвета.

Задача 11. Докажите, что никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника.

Задача 12. По краю круглого стола равномерно расставлены таблички с фамилиями дипломатов, участвующих в переговорах. После начала переговоров оказалось, что ни один из них не сидит напротив своей таблички. Можно ли повернуть стол так, чтобы по крайней мере два дипломата сидели напротив своих табличек?

б) Тот же вопрос, только знаки можно ставить между некоторыми (не обязательно всеми) цифрами.

Задача 11. Можно ли квадрат разрезать на прямоугольники, никакие два из которых не имеют общей стороны?

Задача 12. Числа от 1 до 97 расставили по окружности в произвольном порядке. Может ли сумма любых трёх стоящих подряд чисел быть чётной?

Задача 13. Существует ли самопересекающаяся а) 6-звенная; б) 9-звенная ломаная, пересекающая каждое своё звено ровно один раз? Верно ли, что при любом целом n число $n^2 + n + 41$ простое?

Задача 14. а) Взвод солдат построили в шеренгу. При этом оказалось, что рост каждого солдата (кроме крайних) равен полусумме ростов его соседей. Верно ли, что все солдаты одного роста? б) Взвод солдат построили по кругу. При этом оказалось, что рост каждого солдата равен полусумме ростов его соседей. Верно ли, что все солдаты одного роста?

Задача 15. Существует ли выпуклый четырёхугольник, у которого нет ни центра симметрии, ни оси симметрии, но который можно разрезать прямой на две равные части?

Задача 16. Верно ли, что при любом целом n число $n^3 - n$ делится на 6? Докажите, что среди ныне живущих на Земле людей есть двое родившихся одновременно, с точностью до секунды. (Всего на земле 6 миллиардов жителей; людей старше 150 лет не существует.)

Тема 2. Введение в оптимизационные задачи

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8 ?

Задача 2. а) 8 кузнецов должны подковать 10 лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите, лошадь не может стоять на двух ногах.)

б) А если кузнецов 48, а лошадей 60?

Задача 3. Найдите наименьшее натуральное число:

а) кратное 10, сумма цифр которого равна 10;

б) кратное 100, сумма цифр которого равна 100;

в) кратное 5, сумма цифр которого равна 25.

Задача 4. Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка:

а) в любом квадратице 2×2 ?

б) в любом уголке из трёх клеточек?

Задача 5. В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

Задача 6. У каждого из 222 шестиклассников на Малом Мехмате не более двух близких друзей. Оказавшись в одном помещении, два близких друга начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Какое наименьшее число аудиторий необходимо иметь Евгению Александровичу, чтобы обеспечить бесперебойную работу всей параллели 6 класса?

Задача 7. На старт «Весёлого забега» на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Каково минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?

Задача 8. На какое наибольшее количество разных прямоугольников можно разрезать по линиям сетки:

а) прямоугольник 5×6 клеточек;

- б) прямоугольник 12×6 клеточек;
- в) прямоугольник 2×36 клеточек?

Тема 3. Турниры и задачи на логику

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. В первенстве по футболу, который проводился по круговой системе, участвовали четыре команды: «Юниор», «ЦСК», «Динамо», «Спартак». Последняя встреча окончилась неожиданно: «Юниор» проиграл «Динамо», но это не улучшило турнирного положения «Динамо», а «Юниору» не помешало стать чемпионом. Каков был исход игры между «Спартаком» и «ЦСК»?

Задача 2. В кубке Водоканала по футболу участвовали команды «Помпа», «Фильтр», «Насос» и «Шлюз». Каждая команда сыграла с каждой по одному разу (за победу давалось 3 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0). Команда «Помпа» набрала больше всех очков, команда «Шлюз» — меньше всех. Могло ли оказаться так, что «Помпа» обошла «Шлюз» всего на 2 очка?

Задача 3. Миша, Паша, Саша, Яша и Наташа провели турнир по настольному теннису, играя парами так, что каждые двое сыграли с каждым двумя другими ровно один раз. В результате Саша проиграл 12 игр, а Яша — 6. Сколько игр выиграла Наташа? (Ничьих в теннисе не бывает.)

Задача 4. Есть 9 борцов разной силы. В поединке любых двух из них всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой?

Задача 5. Пять футбольных команд провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

Задача 6. В турнире по волейболу каждая команда встречалась с каждой по одному разу. Каждая встреча состояла из нескольких партий — до трех побед одной из команд. Если встреча заканчивалась со счетом 3:0 или 3:1, то выигравшая команда получала 3 очка, а проигравшая — 0. Если же счет партий был 3:2, то победитель получал 2 очка, а побежденный — 1 очко. По итогам турнира оказалось, что команда «Хитрецы» набрала больше всех очков, а команда «Простак» — меньше всех. Но «Хитрецы» выиграли меньше встреч, чем проиграли, а у «Простак» наоборот, победных встреч оказалось больше, чем проигранных. При каком наименьшем количестве команд такое возможно?

Задача 7. В шахматном турнире на звание мастера спорта участвовало 12 человек, каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии дается 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков. По итогам турнира звание мастера спорта присваивали, если участник набрал более 70% от числа очков, получаемых в случае выигрыша всех партий. Могли ли получить звание мастера спорта

- а) 7 участников; б) 8 участников?

Задача 8. Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс «Кто выше?». За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призеров конкурса?

Задача 9. Команды провели турнир по футболу в один круг (каждая с каждой сыграла один раз, победа — 3 очка, ничья — 1, поражение — 0). Оказалось, что единоличный победитель набрал менее 50% от количества очков, возможного для одного участника. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

Задача 10. В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника

турнира сыграли по 11 партий, один — 10 партий, три — по 8 партий и два — по 7 партий. Может ли он оказаться прав?

Задача 11. В гандбольном турнире в один круг (победа — 2 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0) приняло участие 16 команд. Все команды набрали разное количество очков, причем команда, занявшая 7 место, набрала 21 очко. Докажите, что победившая команда хотя бы один раз сыграла вничью.

Задача 12. Среди актеров театра Карабаса Барабаса прошел шахматный турнир. Каждый участник сыграл с каждым из остальных ровно один раз. За победу давали один сольдо, за ничью — полсольдо, за поражение не давалось ничего. Оказалось, что среди каждых трех участников найдется шахматист, заработавший в партиях с двумя другими ровно 1,5 сольдо. Какое наибольшее количество актеров могло участвовать в таком турнире?

Задача 13. В шахматном турнире участвовали гроссмейстеры и мастера. По окончании турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в матчах с мастерами. Докажите, что количество участников турнира является квадратом целого числа. (Каждый участник сыграл с каждым по одной партии, победа — 1 очко, ничья — 1/2 очка, поражение — 0 очков.)

Тема 4. Геометрия

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Докажите, что для любых трех точек A , B и C на плоскости выполнено неравенство $AC > |AB - BC|$.

Задача 2. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8, длина стороны AB - 0,6. Известно, что длина стороны BC - целое число. Какова эта длина?

Задача 3. Докажите, что длина любой стороны треугольника не превосходит его полупериметра.

Задача 4. От Ленинграда до Москвы 660 км, от Ленинграда до деревни Лыково - 310 км, от Лыково до Клина - 200 км, и от Клина до Москвы - 150 км. Каково расстояние от Лыково до Москвы?

Задача 5. В стране 4 города: A , B , C и D . Два самолета одновременно вылетели из города A . Маршрут первого: $A-B-D-C-A-D-B-C-A$, а маршрут второго: $A-B-C-D-A-B-C-D-A-B-C-D-A$. Какой из самолетов раньше закончит свой маршрут, если их скорости одинаковы?

Задача 6. Найдите внутри выпуклого четырехугольника точку, такую, что сумма расстояний от нее до вершин минимальна.

Задача 7. На плоскости дан квадрат $ABCD$ и точка O . Докажите, что расстояние от точки O до любой вершины квадрата не превосходит суммы расстояний от O до трех других вершин квадрата.

Задача 8. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей больше его полупериметра и меньше периметра.

Задача 9. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике сумма длин диагоналей больше периметра и меньше удвоенного периметра.

Задача 10. Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними не превосходит полупериметра треугольника.

Задача 11. Внутренние покои дворца султана Ибрагима ибн Саида состоят из ста одинаковых квадратных комнат, расположенных в виде квадрата 10×10 . Если у двух комнат есть общая стена, то в ней обязательно есть ровно одна дверь. А если стена внешняя, то в ней обязательно есть ровно одно окно. Сколько окон и дверей в покоях Ибрагима ибн Саида?

Задача 12. У двух человек было по квадратному торту. Каждый сделал на своём торте по два прямолинейных разреза от края до края. При этом у одного получилось три куска, а у другого — четыре. Как такое могло быть?

Задача 13. Есть три одинаковых кирпича и линейка. Как без вычислений узнать длину главной диагонали кирпича? (Главная диагональ — та, которая соединяет две противоположные вершины кирпича. Она лежит внутри кирпича и снаружи не видна.)

Задача 14. Студенты кафедры высшей геометрии и топологии, находясь летом на отдыхе, разрезали арбуз на четыре части и съели. Могло ли после этого остаться пять корок?

Задача 15. У Джузеппе есть лист фанеры, размером 22×15 . Джузеппе хочет вырезать из него 22 прямоугольных заготовки размером 3×5 . Как ему это сделать?

Задача 16. Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы полученная ломаная прошла через 16 точек, расположенных в узлах квадратной сетки 4×4 ?

Задача 17. Ковер-самолет летает только тогда, когда имеет прямоугольную форму. У Ивана-царевича был ковер-самолет размером 9×12 . Как-то раз Змей Горыныч подкрался и отрезал от этого ковра маленький коврик размером 1×8 . Иван-царевич очень расстроился и хотел было отрезать еще кусочек 1×4 , чтобы получился прямоугольник 8×12 . Но Василиса Премудрая предложила поступить по-другому. Она разрезала ковер на три части, из которых волшебными нитками сшила квадратный ковер-самолет размером 10×10 . Сможете ли Вы догадаться, как Василиса Премудрая переделала испорченный ковер?

Задача 18. Можно ли в квадрате 10×10 расставить 12 кораблей 1×4 (для игры типа «морского боя») так, чтобы корабли не соприкасались друг с другом (даже вершинами)?

Задача 19. В круге отметили точку. Разрежьте круг

а) на три;

б) на две части так, чтобы из них можно было составить новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.

Задача 20. На бумаге нарисован квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка Р. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит точка Р (если точка лежит на прямой, то он говорит, что Р лежит на прямой). а) Как за четыре вопроса узнать, лежит ли точка Р внутри квадрата? б) Удастся ли это сделать за три вопроса?

Тема 5. Делимость

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. p и q - различные простые числа. Сколько делителей у числа а) pq ; б) p^2q ; в) p^2q^2 ; г) p^nq^m ?

Задача 2. На сколько нулей оканчивается число $100!$?

Задача 3. Докажите, что число, имеющее нечетное число делителей, - точный квадрат.

Задача 4. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

Задача 5. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем одинаковые цифры - на одинаковые буквы, а разные - на разные. В итоге у него получилось $AB \cdot BC = DDEE$. Докажите, что он где-то ошибся.

Задача 6. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

Задача 7. $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ - составное число.

Задача 8. Сумасшедший кассир меняет любые две монеты на любые три по вашему выбору, а любые три - на любые две. Сможет ли Петя обменять у него 100 монет достоинством 1 рубль на 100 монет достоинством 1 форинт, отдав ему при обмене ровно 2001 монету?

Задача 9. Решите в натуральных числах уравнение: а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $x^2 - y^2 = 303$.

Задача 10. Докажите, что а) для любых взаимно простых чисел; б) для любых натуральных чисел a и b верно равенство $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

Тема 6. Арифметика остатков

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Составить таблицу сложения и умножения остатков по модулю 10

Задача 2. Не проводя обычных вычислений, найти остаток от деления на 7 следующей суммы: $8 + 79 + 780 + 7781 + 77782 + 777783$.

Задача 3. Докажите, что произведение любых трёх последовательных целых чисел делится на 3.

Задача 4. Докажите, что число $a^3 - a$ делится на 3 при любом целом a .

Задача 5. Докажите, что сумма $84+85+86+87+88+89+90$ делится на 7 и на 87.

Задача 6. Найдите трехзначный и семизначный делители числа 103103103.

Задача 7. Какие из следующих утверждений верны: (1) если a делится на c , а b не делится на c , то $a + b$ не делится на c ; (2) если a не делится на c и b не делится на c , то $a + b$ не делится на c ; (3) если a не делится на c и b не делится на c , то ab не делится на c ? Докажите верные и приведите контрпримеры к неверным.

Задача 8. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, и $ab = cd$. Докажите, что если a делится на c , то d делится на b . $\square$

Задача 9. Числа a и b целые, причем $2a + 3b$ делится на 7. Докажите, что $a + 5b$ также делится на 7.

Задача 10. Положительное целое число a четно, но не делится на 4. Покажите, что количество (положительных) четных делителей a равно количеству (положительных) нечетных делителей a .

Задача 11. Докажите, что произведение любых k подряд идущих целых чисел делится на $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$

Тема 7. Простые и составные числа

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Сколько делителей имеет каждое из чисел 31, 25, 100?

Задача 2. С помощью таблицы простых чисел, помещенной на форзаце учебника, определите, какие из чисел 101, 121, 253, 409, 561, 563, 863, 997 являются простыми; составными.

Задача 3. Докажите, что числа 2968, 3600, 888 888, 676 767 являются составными.

Задача 4. Может ли произведение двух простых чисел быть простым числом; составным.

Задача 5. Может ли площадь квадрата выражаться простым числом, если длина его стороны выражается натуральным числом?

Задача 6. Известно, что число m делится на 9. Простым или составным является m ?

Задача 7. Разложите на два множителя числа: 38; 77; 145; 159.

Задача 8. Сколькими способами можно разложить на два множителя числа 18; 42; 55?

Задача 9. Верно ли, что все четные числа являются составными?

Задача 10. Может ли выражаться простым числом объем куба, длина ребра которого выражается натуральным числом?

Задача 11. Длина и ширина прямоугольного параллелепипеда выражаются натуральным числом сантиметров, а высота равна 15 см. Можно ли утверждать, что объем этого параллелепипеда выражается числом кратным 2; 3; 5?

Задача 12. Сколько нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Задача 13. Какую цифру нужно приписать к числу 10 слева и справа, чтобы получилось четырехзначное число, делящееся: а) на 9; б) на 3; в) на 6?

Задача 14. Выпишите из чисел 215 783, 3 289 775... те, которые кратны 3; 9; делятся без остатка на 3 и 5; кратны 9 и 2.

Задача 15. Верно ли, что если число оканчивается цифрой 6, то оно делится на 6? А если число делится на 6, то его запись оканчивается на 6?

Задача 16. Какие цифры можно поставить вместо звездочки, чтобы число делилось без остатка на 3 и 5: $241*$; $1734*$; $43*5$?

Задача 17. Стакан вмещает 210 г крупы. Крупой наполнили $\frac{5}{7}$ стакана. Сколько граммов крупы насыпали в него?

Задача 18. Дочь пообещала: Я схожу в булочную и вымою посуду. Можно ли обещание считать выполненным, если дочь вымыла посуду, но не сходила в булочную; сходила и не вымыла; и вымыла, и сходила; не вымыла посуду и не была в булочной? В чем сходство этой задачи с задачей нахождения решений неравенства $2 < x < 6$ среди чисел 1; 3; 5; 7.

Задача 19. Докажите, что числа 575, 10 053, 3627, 565 656 являются составными.

Задача 20. С помощью таблицы простых чисел, помещенной на форзаце учебника, выберите из чисел 122, 132, 153... простые числа.

Задача 21. Разложите на два множителя всеми возможными способами числа 30, 33, 42, 99.

Задача 22. Периметр прямоугольника 66 дм. Длина его одной стороны составляет $\frac{3}{11}$ периметра. Найдите площадь прямоугольника.

Задача 23. Найдите остаток от деления $56 \cdot 30 + 41$ на 11.

Задача 24. Найдите остаток от деления $111 \cdot 425 \cdot 2424$ на 37.

Задача 25. Найдите какое-нибудь нечётное натуральное число, которое имеет остаток 2 при делении на три, остаток 3 при делении на четыре, 4 при делении на пять и 5 при делении на шесть.

Задача 26. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$. Это можно сделать, например так: доказать, что у этих пар чисел одинаковые наборы общих делителей, откуда следует, что и наибольшие из общих делителей у них одинаковые.

Задача 27. Найдите НОД а) 142 и 235; б) 1313 и 13953.

Задача 28. Найдите НОД а) $107 - 1$ и $105 - 1$; б) $11 \dots 1$ (n единиц) и $11 \dots 1$ (m единиц); в) $am - 1$ и $an - 1$.

Задача 29. Вася и Петя нашли на дороге по пачке 11-рублевков. В чайной Вася выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Петя выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Вася может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Петя.

Тема 8. Начала комбинаторики

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Задача 2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две одинаковые белые ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Задача 3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Задача 4. Чему равно а) $10! \cdot 11$ б) $n! \cdot (n + 1)$?

Задача 5. Вычислите а) $100!/98!$ б) $n!/(n - 1)!$ в) $(99! + 100!)/101$

Задача 6. Докажите, что, если p - простое число, то $(p - 1)!$ не делится на p .

Задача 7. Сколько существует трёхзначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3 (каждая по одному разу)?

Задача 8. Сколько существует 10-значных чисел с неповторяющимися цифрами?

Задача 9. Сколько существует 9-значных чисел с неповторяющимися цифрами?

Задача 10. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Задача 11. Сколько диагоналей в выпуклом n -угольнике?

Задача 12. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Задача 13. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

Тема 9. Принцип Дирихле

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Задача 2. В Ярославле живет около 600 тысяч человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее двухсот тысяч волос.

Задача 3. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Задача 4. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Задача 5. Докажите, что в любом классе есть двое, имеющие одинаковое число друзей в этом классе.

Задача 6. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

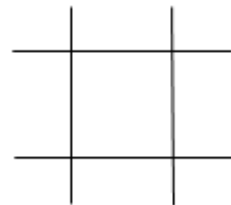
Задача 7. а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке вида из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

б) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке вида было по крайней мере одно черное поле?

Задача 8. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

Задача 9. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Задача 10. В окно $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$ вставлена решётка, показанная на рис. справа. Внутренний квадрат, образованный прутьями – $0,5 \text{ м} \times 0,5 \text{ м}$. Какое наибольшее число пауков может ужиться на этой решётке, если паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем 51 см? Расстояние измеряется вдоль прутьев.



Задача 11. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Задача 12. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

Тема 10. Введение в теорию графов

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон- Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Задача 2. Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рис.1, расположить их так, как показано на рис.2?

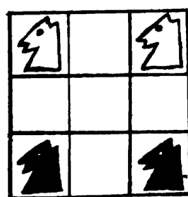


Рис. 1

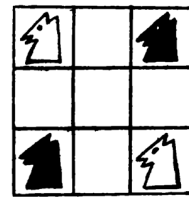
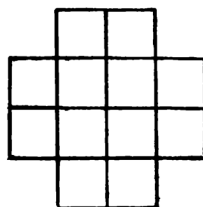


Рис. 2

Задача 3. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки.



Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

Задача 4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Задача 5. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Задача 6. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Задача 7. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзей?

Задача 8. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

Задача 9. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Задача 10. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Задача 11. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Задача 12. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Задача 13. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Тема 11. Математические соревнования

Примеры задач, используемых на мини-олимпиадах:

Задача 1. Семь последовательных натуральных чисел как-то расставили по кругу. После этого для каждой пары соседних чисел вычислили разность между ними (из большего числа вычли меньшее). Могли ли пять подряд идущих разностей (из семи) равняться числам 2, 1, 6, 1, 2?

Задача 2. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника ABCD, его стороны и диагонали AC и BD – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$, а вторая проехала за час по маршруту $D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта C: первая по маршруту $C \rightarrow B \rightarrow D$, вторая – по маршруту $C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B$, а встреча произойдет на дороге BD? (Скорости обеих машин постоянны).

Задача 3. Можно ли так расставить по кругу 100 чисел 1 и 101 число -1 так, чтобы произведение любых трех подряд идущих чисел было положительным?

Задача 4. Найдите все решения ребуса $\text{КОРОВА} + \text{КОРОВА} = \text{МОЛОКО}$. Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.

Задача 5. В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он – лжец». Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Могло ли в зале быть ровно 101 человек?

3-ий год обучения

Тема 1. Математическая логика

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. При любом ли значении x истинно следующее утверждение: «если $3x - x^2 = 1$, то $|x|/x = 1$ »?

Задача 2. Путешественник приехал в страну, где имеются всего два города. В одном из них живут рыцари, а в другом - лжецы. При этом жители одного города могут приезжать в гости в другой город. В одном из городов путешественник встретил местного жителя. Можно ли задав ему один вопрос (на который можно ответить "да" или "нет"), выяснить

а) в каком городе он находится,

б) жителем какого города является встреченный абориген?

Задача 3. Между Колей и Сашей, увлекающимися решением логических задач, произошёл следующий разговор:

Коля: Я купил три полки для книг и расставил на них все свои учебники. Когда я сосчитал, сколько книг стоит на каждой полке и перемножил эти три числа, у меня получилось 72. Ты ведь знаешь, сколько у меня учебников?

Саша: да, знаю.

Коля: тогда скажи, сколько книг стоит на каждой полке?

Саша: у меня не хватает данных.

Коля: полка, где было меньше всего книг, выглядела хуже остальных, и я поставил туда вазу с цветами.

Саша: теперь мне ясно, вот ответ ...

И Саша точно сказал, сколько книг стоит на каждой полке. Скажите и Вы.

Задача 4. За круглым столом сидят рыцари и лжецы — всего 12 человек. Каждый произнёс: «Все, кроме меня и моих соседей — лжецы». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидело за столом?

Задача 5. Вася задумал число 1, 2 или 3. Петя хочет отгадать задуманное число, задав один вопрос, допускающий три ответа: «да», «нет» или «не знаю». Какой вопрос следует задать?

Задача 6. Каждый из четырех гномов - Бенья, Веня, Женя, Сеня - либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор: Бенья - Веня: «Ты врун»; Женя - Бенья: «Сам ты врун»; Сеня - Женя: «Да оба они вруны, - (подумав), - впрочем, ты тоже». Кто из них говорит правду?

Задача 7. Предположим, что следующие утверждения истинны:

среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;

люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Является ли в таком случае истинным утверждение, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

Задача 8. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что она переходит в себя при повороте на угол 48° . Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте на: а) 72° ; б) 90° ?

Задача 9. Сколько существует пятизначных чисел, получаемых из числа 12345 перестановкой цифр и у которых чётные цифры не стоят рядом?

Задача 10. Имеются две шкатулки, в одной из которых лежит ключ. На первой шкатулке написано: «Ключ находится во второй шкатулке». На второй написано: «Одно из двух утверждений, записанных на этих шкатулках, истинно, а второе ложно». В какой из шкатулок находится ключ?

Задача 11. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так, что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Задача 12. Даны три действительных числа: a , b и c . Известно, что $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$, $abc > 0$. Докажите, что $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Задача 13. Даны 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их попарных разностей найдутся четыре одинаковых.

Задача 14. Докажите, что простых чисел, дающих остаток 2 при делении на 3, бесконечно много.

Задача 15. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел.

Задача 16. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррационально.

Задача 17. Представьте число 100 в виде суммы чисел, в записи которых встречаются все десять цифр и по одному разу.

Задача 18. Справедливо ли утверждение: Все простые числа нечетны?

Задача 19. Докажите, что из 53 различных натуральных чисел, не превосходящих в сумме 1990, всегда можно выбрать 2 числа, составляющих в сумме 53.

Задача 20. Натуральное число n таково, что $3n + 1$ и $10n + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число $29n + 11$ составное.

Задача 21. Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой - целое число (не равное 0 и -1). Докажите, что сумма любого числа произвольно выбранных ее членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

Задача 22. Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике?

Задача 23. Каждая точка пространства окрашена в один из пяти цветов, причем каждым из этих пяти цветов окрашена хотя бы одна точка. Докажите, что найдется плоскость, все точки которой окрашены не менее, чем в 4 цвета.

Задача 24. Имеется сетка, состоящая из квадратов размером 1×1 . Каждый ее узел покрашен в один из четырех данных цветов так, что вершины любого квадрата 1×1 покрашены в разные цвета. Доказать, что найдется прямая, принадлежащая сетке, такая, что узлы, лежащие на ней, покрашены в два цвета.

Задача 25. Можно ли бумажный круг с помощью ножниц перекроить в квадрат той же площади? (Разрешается сделать конечное число разрезов по прямым линиям и дугам окружностей).

Тема 2. Текстовые задачи

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья – четвёрки, половина – тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?

Задача 2. Сколько фунтов зерна нужно смолоть, чтобы после оплаты работы – 10% от помола, осталось ровно 100 фунтов муки? Потерь при помоле нет.

Задача 3. В тесте к каждому вопросу указаны пять вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае – наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $\frac{1}{5}$ часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Задача 4. На острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

Задача 5. По данным опроса, проведенного в 7 "Е" классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 "Е", если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Задача 6. В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья – четвёрки, половина – тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?

Задача 7. Сколько фунтов зерна нужно смолоть, чтобы после оплаты работы – 10% от помола, осталось ровно 100 фунтов муки? Потерь при помоле нет.

Задача 8. В тесте к каждому вопросу указаны пять вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае – наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $\frac{1}{5}$ часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Тема 3. Теория чисел

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Найдите последнюю цифру числа: а) $1234567 + 9876543$; б) 13579×8642 , в) 13^5 , г) 7^{19} .

Задача 2. Найдите последнюю цифру числа: а) 2^{100} ; б) 2017^{2017} ; в) $123456789^{987654321}$.

Задача 3. В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $25321^{127} - 1$. Не опечатка ли это? (Простое число — это натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя.)

Задача 4. Делится ли число $47^{30} + 39^{50}$ на 10?

Задача 5. В магазин привезли 206 литров молока в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов каждого вида?

Задача 6. Найдите последнюю цифру в произведении: а) всех простых чисел, не превосходящих 1234; б) всех нечетных простых чисел, не превосходящих 1234; в) всех нечетных чисел от 1 до 2017.

Задача 7. Сколькими нулями оканчивается число $2017! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2015 \times 2016 \times 2017$?

Задача 8. Докажите, что среди квадратов любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10.

Задача 9. Найдите последнюю цифру числа: а) $(7^7)^7$; б) 7^{7^7} .

Задача 10. Докажите, что если $a > b$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$.

Задача 11. Найдите $\text{НОД}(2015, 1001)$.

Задача 12. Последовательность чисел Фибоначчи задана по следующему правилу: $F_1 = F_2 = 1$, а все последующие числа определяются по правилу $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. (Начало бесконечной последовательности Фибоначчи выглядит так: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, и т.д.) Найдите $\text{НОД}(F_{2015}, F_{2014})$.

Задача 13. Докажите, что если a при делении на b дает остаток r , то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r, b)$.

Задача 14. Найдите $\text{НОД}(747474, 111)$.

Задача 15. На прямой сидит блоха, и прыгает всякий раз либо на 15 сантиметров вправо, либо на 21 сантиметр влево. В каких точках прямой может побывать эта блоха?

Задача 16. Докажите, что

а) если m_1 и m_2 линейно представимы через a и b , то $m_1 + m_2$ и $m_1 - m_2$ также линейно представимы через a и b ;

б) если t линейно представимо через a и b , то kt линейно представимо через a и b для любого целого k ;

в) $\text{НОД}(a, b)$ линейно представим через a и b ;

г) число t линейно представимо через a и b тогда и только тогда, когда оно делится на $\text{НОД}(a, b)$.

Задача 17. $\text{НОД}(a, b) = d$. Докажите, что $\text{НОД}(2a - 1, 2b - 1) = 2d - 1$.

Задача 18. Найдите $\text{НОД}(235 + 1, 2100 + 1)$.

Задача 19. В государстве имеют хождение монеты достоинством a и b золотых, где a и b — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что:

а) покупатель может заплатить в магазине любую сумму в целое число золотых (возможно, получив сдачу), при условии, что и у покупателя, и у продавца имеется достаточно большой запас монет каждого достоинств;

- б) такими монетами можно набрать (без сдачи) любую сумму, начиная с $2ab$ золотых;
в) найдите наибольшее число золотых, которое нельзя набрать такими монетами.

Задача 20. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. В доме есть лифт с двумя кнопками, одна из которых поднимает лифт на a этажей вверх, а вторая опускает на b этажей вниз, если это возможно (например, на последнем этаже первая кнопка не работает). Докажите, что на этом лифте можно попасть с любого этажа на любой другой, если высота дома не меньше: а) $2ab$; б) $a + b$.

Тема 4. Инвариант

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. На n ёлках сидят n чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров в противоположном направлении.

б) При каких n все чижи смогут собраться на одной ёлке?

а) Если задача в общем виде не получается, разберите случай $n = 6$.

Задача 2. Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

Задача 3. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Задача 4. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился ноль. С какого числа начинали?

Задача 5. На доске выписаны числа $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b , стираем их и пишем на доску число $a + b + ab$. Такую операцию проделываем до тех пор, пока не останется одно число. Какое число может остаться?

Задача 6. В каждой вершине куба стоит число $+1$ или -1 . В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной нулю?

Задача 7. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Задача 8. Можно ли доску размерами $4 \times N$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?

Задача 9. Дан выпуклый $2m$ -угольник $A_1 \dots A_{2m}$. Внутри его взята точка P , не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в точках $A_1, \dots, A_{2m}$.

Задача 10. Лягушка прыгает вдоль прямой: а) на 1 см вправо или влево; б) сначала на 1 см вправо, затем на 3 см вправо или влево, затем на 5 см вправо или влево, и т. д. Может ли она оказаться в исходной точке после своего 101-го прыжка?

Задача 11. а) Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля $A1$ на поле $A8$? б) Тот же вопрос для шахматного коня.

Задача 12. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 20, 21$. Можно стереть любые два числа a и b и записать число: а) $a+b$; б) ab ; в) $a+b-2$. Какое число получится после 20 таких действий? г) Можно стереть любые два числа и записать их разность. Можно ли добиться того, чтобы в результате все числа на доске стали нулями? д) Вопрос пункта г), если написаны натуральные числа от 1 до 23.

Задача 13. а) На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном? б) На доске написаны числа 0, 0, 0, 1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?

Задача 14. В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли так быть, что из них ровно 19 делятся на три?

Задача 15. а) На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной. б) На шахматной доске 5×5 расставили 25 шашек — по одной на каждой клетке. Потом все шашки сняли с доски, но запомнили, на какой клетке стояла каждая. Можно ли ещё раз расставить шашки на доске таким образом, чтобы каждая шашка стояла на клетке, соседней (по стороне) с той, на которой она стояла в прошлый раз?

Задача 16. Петя ввёл в компьютер число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

Задача 17. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными? Подсказка: рассмотрите диаметрально противоположные числа.

Задача 18. В колбу поместили 133 бактерии типа А, 135 бактерий типа В и 137 бактерий типа С. Если две бактерии разных типов соприкасаются, то они обе меняют свой тип на третий. Может ли оказаться, что через некоторое время все бактерии в колбе будут одного типа? Подсказка: подумайте про остатки от деления на 3.

Тема 5. Комбинаторика

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1.

В школе 350 учеников. Из них 200 занимаются в математическом кружке, 110 — в химическом и 100 ребят не посещают эти кружки. Сколько химиков увлекается математикой?

Задача 2. У двух начинающих коллекционеров по 200 марок и по 105 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Задача 3. В цветике-семицветике 7 лепестков разного цвета. Сколько различных цветиков-семицветиков существует?

Задача 4. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см?

Задача 5. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?

Задача 6. Доказать, что $3n!/6n\ n!$ — натуральное число при любом натуральном n .

Задача 7. На окружности отмечены 48 красных и 74 синих точек. Рассмотрим всевозможные отрезки (хорды) с концами в отмеченных точках. У скольких отрезков концы а) разного цвета; б) одинакового цвета?

Задача 8. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?

Задача 9. Город Феди Иванова — квадратный и имеет размеры 6×8 км. Дом находится в юго-западном углу, а школа — в северо-восточном. Сколькими способами может Федя добраться до школы, делая шаг величиной в 1 км, если двигаться разрешено только в точности на север или на восток?

Задача 10. Как двум братьям поделить между собой пачку мороженого так, чтобы ни один из них не мог обвинять другого в том, что ему досталось меньше половины всего мороженого. (Чтобы каждый имел возможность получить не меньше половины.)

Задача 11. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек», чтобы 4 буквы «е» не шли подряд?

Задача 12. В Москве 7 высотных зданий. Если смотреть на них издалека, они в каком-то порядке располагаются на линии горизонта. Если смотреть из разных точек, будут разные способы расстановки. Турист едет по московской кольцевой автодороге и постоянно смотрит на высотки. Увидит ли он все возможные расстановки высоток, когда завершит круг?

Тема 6. Теория графов

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Нарисуйте куб, тетраэдр, октаэдр как плоский граф на плоскости.

Задача 2. В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 непересекающимися каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Островом считается часть суши, окруженная водой. Сколько в этой стране островов?

Задача 3. Внутри квадрата отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и вершинами квадрата, так что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Задача 4. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Задача 5. Пусть есть планарный граф, в котором N компонент связности. Как изменится для него формула Эйлера?

Задача 6. Докажите, что полный граф на пяти вершинах не планарен.

Задача 7. Докажите, что любой многогранник можно представить в виде плоского графа.

Задача 8. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

Задача 9. В стране 2011 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

Задача 10. В классе 20 человек. Из них все, кроме Пети дружат ровно с 5 одноклассниками. Может ли Петя ни с кем не дружить?

Задача 11. Может ли в стране, где из каждого города выходит по три дороги и нет развилок и тупиков, быть ровно 100 дорог?

Задача 12. Иван утверждает, что среди любых: а) четырёх; б) пяти; в) шести человек обязательно найдётся либо трое знакомых друг с другом, либо трое незнакомых. Не завирается ли он?

Задача 13. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Задача 14. В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире, и сколько партий сыграл выбывший участник?

Задача 15. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединён авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

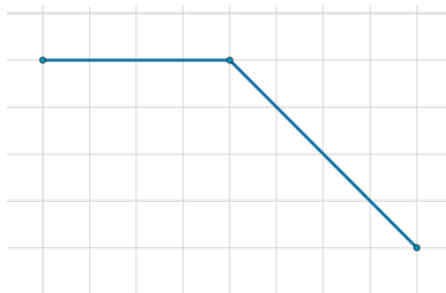
Задача 16. В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что можно закрыть какой-то один вид транспорта так, чтобы из любого города можно было проехать в любой другой (возможно, с пересадками).

Тема 7. Геометрия

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Постройте отрезок, длина которого равна: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{13}$.

Задача 2. На клетчатой бумаге изображен угол. Найдите его градусную величину.



Задача 3. Саша сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рисунок) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Саша предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Саша?

						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Задача 4. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратах 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

Задача 5. Дан прямоугольник 100×101 , разбитый линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ.

Задача 6. В узлах клетчатой плоскости отмечено 5 точек. Доказать, что есть две из них, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.

Задача 7. На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4 . Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.

Задача 8. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4 . Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.

Задача 9. а) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 8×2 на прямоугольники 1×2 ? б) Придумайте и опишите фигуру, которую можно разрезать на прямоугольники 1×2 ровно 555 способами.

Задача 10. Даны сто рисунков:



Сколько всего точек на них изображено?

Задача 11. С помощью сломанного циркуля, у которого не меняется раствор, начерчена окружность. Найдите её центр, пользуясь только этим циркулем.

Задача 12. Все вершины пятиугольника, каждая сторона которого меньше 1 мм, лежат на одной окружности. Обязательно ли эту окружность можно начертить с помощью циркуля, раствор которого можно менять от 0 до 20 см?

Задача 13. а) Сложите 4 треугольника, используя 6 одинаковых спичек. б) Добавьте ещё 3 такие же спички, чтобы образовалось ещё 3 треугольника.

Задача 14. Можно ли изображённые на рисунке три пирамидки сложить соответственно из 10-ти, 12-ти и 14-ти одинаковых спичек?



Задача 15. Даны сто гексов:



Сколько всего точек во всех ста гексах?

Задача 16. Найдите $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = ?$ и докажите, используя листок в клетку.

Тема 8. Принцип математической индукции

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее: а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объясните.

Задача 2. Докажите тождество: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Задача 3. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

Задача 4. Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?

Задача 5. Найдите все натуральные n , для которых $2n \leq n^2$.

Задача 6. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении n : $(n + 1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

Задача 7. n человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом n .

Задача 8. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Задача 9. Найдите $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = ?$ и докажите.

Задача 10. n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $1/n$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

Задача 11. В клетчатом квадрате 64×64 вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть квадрата можно разрезать на уголки из трех клеток.

Тема 9. Математические соревнования

Примеры задач, используемых на мини-олимпиадах:

Задача 1. В самолете летят жители города лжецов и жители города рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда обманывают. Все пассажиры сели в ряды по 4 человека, и бортпроводник задал каждому пассажиру один и тот же вопрос. «Верно ли, что в вашем ряду столько же Ваших земляков, сколько жителей другого города?» Прозвучало

ровно 70 утвердительных ответов. Сколько лжецов летит в самолете? Человек считается своим собственным земляком.

Задача 2. Имеется дробь $1/n$. Восьмиклассник Вася каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Вася утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

Задача 3. Имеется прямоугольный параллелепипед. Вася считает, что при увеличении каждого из его ребер на 1 см полная поверхность параллелепипеда увеличится на 9 см², а объем увеличится на 5 см³. Может ли он оказаться прав? Замечание. Прямоугольный параллелепипед – пространственная фигура, напоминающая куб, но, ребра, выходящие из одной вершины, у неё могут иметь различную длину. Её объем равен произведению длин трех ребер, выходящих из одной вершины.

Задача 4. На стороне BC параллелограмма ABCD выбрана точка M так, что равнобедренным оказался каждый из треугольников ABM, AMD, CDM. Найдите все возможные значения углов параллелограмма при этих условиях. (Ответ нужно выразить в градусах).

Задача 5. Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена числом 2, сторона с двумя синими вершинами помечена числом $1/2$, а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.

Задача 6. Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор большим, если сумма весов гирь поднабора больше или равна $2/3$. Для каждого поднабора найдем число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.

4-ый год обучения

Тема 1. Математическая логика

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. На его сторонах построены внешним образом правильные треугольники ABC, BCA, и CAB. Докажите, что треугольник ABC не может быть правильным.

Задача 2. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы прилегают к одной стороне пятиугольника.

Задача 3. Дан выпуклый многоугольник и точка O внутри него. Любая прямая, проходящая через точку O, делит площадь многоугольника пополам. Доказать, что многоугольник центрально-симметричный и O - центр симметрии.

Задача 4. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

Задача 5. Существует ли тетраэдр, все грани которого равнобедренные треугольники, причём никакие два из них не равны?

Задача 6. Любой ли трехгранный угол можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится правильный треугольник?

Задача 7. Докажите, что в кубе можно проделать отверстие, через которое можно протащить куб таких же размеров.

Задача 8. В сундуке лежали два колпака белого цвета и три черного. В темную комнату завели трех мудрецов и надели на них какие-то колпаки из сундука. Потом вывели в другую комнату. Они не видят, какого цвета колпак на них, но видят колпаки других. Через некоторое время один из них догадался, какого цвета на нем колпак. Как? Какого цвета был колпак?

Задача 9. Шесть на два. Восстановите числовой пример на деление

ш	е	с	т	ь		д	в	а
т	и	с				т	р	и
	а	в	т					
	р	ь	е					
		и	е	ь				
		и	е	ь				
				0				

Задача 10. ABCDEF – число из шести цифр. Все они разные и расположены слева направо в возрастающем порядке. Число это – полный квадрат. Определите, какое это число.

Задача 11. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадрата и раскрасил их в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратов. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка – белого или чёрного?

Задача 12. Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

Встречай завтра поезд СТО вагон О

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли еще две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

СЕКРЕТ – ОТКРОЙ = ОТВЕТ – ТВОЙ

СЕКРЕТ – ОТКРЫТ = 20010

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул:

– Теперь ясно, какой поезд надо встречать!

Инспектор удивился.

– Элементарно, Лестрейд! – пояснил сыщик. – Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные – разные, а черточка – это минус! Мориарти едет в поезде номер ...

Напишите номер поезда и вагона.

Задача 13. Пол комнаты площадью 6 м^2 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м^2 . Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2 .

Задача 14. Сколько существует целых чисел от 1 до 33000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?

Задача 15. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Задача 16. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

Задача 17. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?

Задача 18. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на своё место?

Задача 19. Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

Задача 20. Дима провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что: 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Дима узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врет ли управдом?

Задача 21. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через А) записана единица. Через кубик А проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.

Задача 22. На доске нарисованы три четырёхугольника. Петя сказал: "На доске нарисованы по крайней мере две трапеции". Вася сказал: "На доске нарисованы по крайней мере два прямоугольника". Коля сказал: "На доске нарисованы по крайней мере два ромба". Известно, что один из мальчиков сказал неправду, а двое других – правду. Докажите, что среди нарисованных на доске четырёхугольников есть квадрат.

Задача 23. 30 девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих платьях – водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

Задача 24. Текст МИМОПРАСТЕТИРАСИСПДАИСАФЕИИБОЕТКЖРГЛЕОЛОИШИСАННСЙСАООЛТЛЕЯТУИЦВЫИПИЯДПИЩПЬПСЕЮЯЯ получен из исходного сообщения перестановкой его букв. Текст УЩФМШПДРЕЦЧЕШЮШЧДАКЕЧМДВКШБЕЕЧДФЭПЙЩГШФЩЦЕЮЩФПМЕЧПМЕРЩМЕОФЧЩХЕШРТГДИФРСЯЫЛКДФФЕЕ получен из того же исходного сообщения заменой каждой буквы на другую букву так, что разные буквы заменены разными, а одинаковые – одинаковыми. Восстановите исходное сообщение.

Задача 25. Дана криптограмма:

$$\begin{array}{rclcl} \text{ФН} & \times & \text{Ы} & = & \text{ФАФ} \\ + & & \times & & - \\ \text{ЕЕ} & + & \text{Е} & = & \text{НЗ} \\ = & & = & & = \\ \text{ИША} & + & \text{МР} & = & \text{ИМН} \end{array}$$

Восстановите цифровые значения букв, при которых справедливы все указанные равенства, если разным буквам соответствуют различные цифры. Расставьте буквы в порядке возрастания их цифровых значений и получите искомый текст.

Тема 2. Теория чисел

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Что можно точно утверждать про натуральное число n , если известно, что $105n$ кратно 30: а) n кратно 2; б) n кратно 6; в) n кратно 30?

Задача 2. Для каждого натурального n через $\varphi(n)$ обозначим количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Найти: а) $\varphi(p)$; б) $\varphi(p^2)$, где p простое; в) $\varphi(1024)$. г) Функция φ возрастает?

Задача 3. Доказать, что натуральное число имеет нечётное число делителей тогда и только тогда, когда оно является полным квадратом.

Задача 4. Про рациональное число x известно, что $x + 1/x$ — натуральное число. Доказать, что $x = 1$.

Задача 5. Про целые числа m и n известно, что $m^2 + n^2$ кратно 3. Доказать, что m и n кратны 3.

Задача 6. Квадрат натурального числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими?

Задача 7. Найти все натуральные n , при которых $3^n + 1$ кратно 2^n .

Тема 3. Инвариант

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стоят правильно, а один перевернут доншком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

Задача 2. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

Задача 3. Круг разделён радиусами на 6 равных секторов. В каждом секторе стоит фишка. Разрешается одновременно перемещать две любые фишки в соседние сектора: одну по часовой стрелке, а другую — против. Можно ли таким образом собрать все фишки в одном секторе?

Задача 4. На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке? А если чижей и ёлок семь?

Задача 5. На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая ее по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но а) рубашкой вверх; б) рубашкой вниз и вверх ногами?

Задача 6. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Задача 7. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: А (20 штук), В (21 штука) и С (22 штуки). Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких слияний в пробирке осталась одна амёба. Каков её тип?

Задача 8. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

Задача 9. Если к числу 100 применить 99 раз операцию взятия факториала, получится число X . Если к числу 99 применить 100 раз операцию взятия факториала, получится число Y . Какое из этих двух чисел больше?

Тема 4. Дискретная непрерывность

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

Задача 2. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Задача 3. Матч «Бавария» – «Спартак» закончился со счетом 5:8. Муж (болеющий за «Баварию») и жена (болеющая за «Спартак») собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счет: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребенком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.

Задача 4. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

Задача 5. Некто расставил в произвольном порядке десятичное собрание сочинений. Назовем «беспорядком» пару томов (не обязательно соседних), в которой том с большим номером стоит левее. Для некоторой расстановки томов подсчитано количество всех «беспорядков». Какие значения оно может принимать?

Задача 6. В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Обязательно ли среди них найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых?

Задача 7. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

Задача 8. К автомату с газированной водой стояла очередь из ста гномов. Газировка бывает двух сортов: с сиропом – за 3 копейки и без сиропа – за 1 копейку. Самый первый гном купил газировку с сиропом, а второй – без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент гномов, уже купивших газировку с сиропом, было столько же, сколько гномов, собиравшихся купить газировку без сиропа?

Задача 9. В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают выходить замуж за бедных женщин. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различные.)

Задача 10. Петя записал в ряд несколько чисел так, что любые два соседних отличаются не больше, чем на 1. Самое маленькое из этих чисел равно – 5, а самое большое – это 100,25. Докажите, что хотя бы одно из записанных чисел отличается от нуля не больше, чем на 0,5.

Задача 11. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

Задача 12. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых – фальшивые (но какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?

Задача 13. Школьники играли в настольный теннис «на победителя». Они установили очередь и правила: вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь шла в обратном порядке (вчерашний последний стал первым, предпоследний – вторым, и так далее). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый день, и во второй. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

Задача 14. После первого тайма футбольного матча счет был 0:1, а закончилась игра со счетом 5:3. Докажите, что в какой-то момент матча счет был ничейным.

Задача 15. В ряд выложено 20 белых и 20 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики – белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.

Задача 16. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые - направо, а остальные - кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

Задача 17. а) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа? б) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

Задача 18. На клетчатой доске 10×10 половина клеток белые, а половина - черные. а) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток. б*) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две равные части с равным числом черных клеток.

Задача 19. За круглым столом сидит четное количество гномов в колпаках с помпонами, причем, у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых количество помпонов на колпаках отличается не больше, чем на 1.

Задача 20. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

Задача 21. В некоторых клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 27. Докажите, что в некотором квадрате 5×5 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 5.

Задача 22. В 1954 году в Стокгольме проходил чемпионат мира по хоккею с шайбой. На нём впервые сыграла сборная СССР и сенсационно стала чемпионом мира. Финальный матч против команды Канады завершился со счетом $7 - 2$. Докажите, что во время матча был момент, когда количество шайб, забитых канадскими хоккеистами, равнялось количеству шайб, которые осталось забить советских хоккеистам.

Задача 23. В ряд выложено 50 белых и 50 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики — белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них окажется поровну черных и белых.

Задача 24. Последовательность целых чисел 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, ... начинается с двойки, а каждое следующее число получается из предыдущего умножением на $3/2$ и округлением по недостатку. Докажите, что в этой последовательности есть целое шестизначное число.

Задача 25. На плоскости отмечены 10000 точек. Докажите, что найдется не проходящая через эти точки прямая, по одну сторону которой лежит ровно 2010 отмеченных точек.

Задача 26. Журнал «Юный диверсант» выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 — 2001, №2 — 2001, №3 — 2002, ... Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

Задача 27. На каждой клетке шахматной доски стоит по королю — белому либо черному, причем есть короли обоих цветов. Докажите, что есть белый король, который бьет черного.

Задача 28. За круглым столом сидит 10 мальчиков и 10 девочек. Докажите, что найдется группа из 10 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков поровну.

Задача 29. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2$, $1001! + 3$, ..., $1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

Задача 30. Правильный 1001-угольник разбили непересекающимися диагоналями на 999 треугольников. Докажите, что среди этих треугольников по крайней мере три равнобедренных.

Задача 31. $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: n синих и n красных, чередующихся в произвольном порядке. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n по порядку. В красные сектора, начиная с некоторого, записывают те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n .

Тема 5. Оптимизация

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Задача 2. На плоскости даны 2007 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся: а) треугольник с вершинами в этих точках, не содержащий ни одной из оставшихся точек; б) окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

Задача 3. Докажите, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне (а не на её продолжении).

Задача 4. а) На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что хотя бы одна из них бьёт не более двух других. б) На шахматной доске стоят несколько ферзей. Докажите, что какой-то из этих ферзей бьёт не более четырёх других. в) Всегда ли верно, что какой-то из ферзей бьёт не более трёх других?

Задача 5. Путешественник выходит из своего родного города и отправляется в самый дальний от него город страны, затем — в город, самый дальний от этого города, и так далее. Расстояния между всеми городами различны. Докажите, что если путешественник не вернулся в родной город после второго перехода, то он никогда в него не вернётся.

Задача 6. Можно ли на плоскости расположить 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

Задача 7. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Задача 8. В парламенте у каждого не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

Задача 9. Имеются два бикфордовых шнура. Шнуры при поджигании горят неравномерно, но каждый полностью сгорает за одну минуту. Как с помощью этих шнуров отмерить: а) 30 секунд; б) 45 секунд?

Тема 6. Нестандартные уравнения и неравенства

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше 4.

Задача 2. Докажите, что $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ при любых x и y .

Задача 3. $a + b = 1$. Каково максимальное значение величины ab ?

Задача 4. Рассматриваются такие наборы действительных чисел $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}\}$, заключённых между 0 и 1, что $x_1 x_2 x_3 \dots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \dots (1 - x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой набор, для которого значение $x_1 x_2 x_3 \dots x_{20}$ максимально.

Задача 5. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $ab + bc + ca \geq 12$, то $a + b + c \geq 6$.

Задача 6. $a, b, c \geq 0$. Докажите, что $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$.

Задача 7. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Задача 8. Доказать неравенство

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \dots + x_{1987} \cdot x_{1988} + x_{1988} \cdot x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1988}^2$$

Задача 9. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

Задача 10. Докажите, что для положительных значений a , b и c выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Тема 7. Геометрия

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. а) Докажите, что медиана делит треугольник на две равновеликие части.
б) Докажите, что три медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.

Задача 2. а) В треугольнике ABC точка C_1 лежит на стороне AB , точка K — на отрезке CC_1 . Докажите, что $S_{ACK}/S_{BCK} = AC_1/C_1B$. б) Теорема Чевы. Три точки A_1 , B_1 и C_1 выбраны на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что $(AC_1/C_1B) \cdot (BA_1/A_1C) \cdot (CB_1/B_1A) = 1$.

Задача 3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что $SAOB \cdot SCOD = SBOC \cdot SDOA$.

Задача 4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника до его сторон не зависит от положения этой точки.

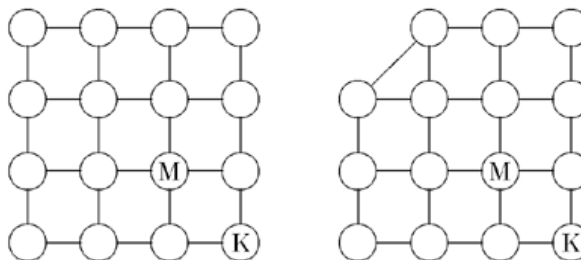
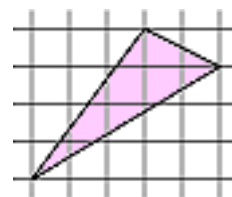
Задача 5. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей диагонали.

Задача 6. Найдите площадь треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге. Площадь одной клетки равна 1.

Задача 7. Могут ли длины высот треугольника равняться 1, 2 и 3?

Задача 8. Длины сторон треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1?

Задача 9. Кошка бегает за мышкой по доске, изображённой на а) первом; б) втором рисунке. За один ход можно перейти в соседнее поле (по нарисованному отрезку). Начинает кошка. Кошка съедает мышку, если оказывается с ней в одном месте. Удастся ли ей это?



Задача 10. Разрежьте квадрат со стороной 5 на несколько частей, из которых можно сложить два квадрата со сторонами 3 и 4.

Задача 11. Постройте параллелограмм по высоте, основанию и углу между диагоналями.

Задача 12. Постройте треугольник по трём медианам.

Задача 13. В квадрате отметили по точке на каждой стороне, а сам квадрат стёрли. Восстановите его.

Задача 14. В треугольнике отметили середины сторон, а сам треугольник стёрли. Восстановите его.

Задача 15. Через данную точку на стороне треугольника проведите прямую, делящую площадь треугольника пополам.

Задача 16. Внутри треугольника ABC найдите такую точку M , что $S_{AMB} : S_{BMC} : S_{CMD} = 1 : 2 : 3$.

Задача 17. а) Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. б) На

плоскости нарисованы две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Имея только линейку, найдите середину отрезка. (Замечание. С помощью линейки можно проводить прямую через любые две имеющиеся точки. Никакие другие операции невозможны. «Делений» на линейке нет!)

Задача 18. Число $a + (1/a)$ целое. Докажите, что $a^2 + (1/a^2)$ тоже целое.

Задача 19. Найдите все натуральные числа n такие, что числа n , $n + 2$ и $n + 4$ — простые.

Тема 8. Квадратный трехчлен

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

Задача 1. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q .

Задача 2. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Выразите через p и q следующие выражения:

$$\text{а) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad \text{б) } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}; \quad \text{в) } x_1^3 + x_2^3; \quad \text{г) } \frac{1}{(x_1 + p)^2} + \frac{1}{(x_2 + p)^2}.$$

Задача 3. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Напишите уравнение, корнями которого будут числа y_1, y_2 равные:

$$\text{а) } x_1^3, x_2^3; \quad \text{б) } \frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}; \quad \text{в) } x_1 + \frac{1}{x_2}, x_2 + \frac{1}{x_1}; \quad \text{г) } \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}.$$

Задача 4. На параболе $y = x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D , если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

Задача 5. Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

Задача 6. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

Задача 7. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

Задача 8. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа?

Задача 9. Один из двух приведённых квадратных трёхчленов имеет два корня, меньших 1000, другой — два корня, больших 1000. Может ли сумма этих трёхчленов иметь один корень меньший 1000, а другой — больший 1000?

Задача 10. Найдите все такие пары квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d$, что a и b — корни второго трёхчлена, c и d — корни первого.

Задача 11. Корни двух приведённых квадратных трёхчленов — отрицательные целые числа, причём один из этих корней — общий. Могут ли значения этих трёхчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

Задача 12. Могут ли все корни уравнений $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - (p + 1)x + q = 0$ оказаться целыми числами, если: а) $q > 0$; б) $q < 0$?

Тема 9. Математические соревнования

Примеры задач, используемых на мини-олимпиадах:

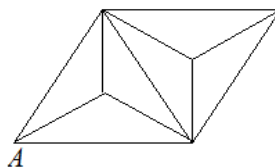
Задача 1. У Семёна есть 20 чисел: 1, 2, 3, ..., 19, 20. Он составил 10 дробей, вписав десять из этих чисел в каком-то порядке в числители, а остальные в каком-то порядке записал в знаменатели. Какое наибольшее количество целых чисел мог получить Семён после того, как сократит все записанные дроби?

Задача 2. Перед уроком Нестор Петрович написал на доске несколько слов. Когда прозвенел звонок на урок, он заметил ошибку в первом слове. Если он исправит в нем ошибку, то слова с ошибками будут составлять 24%, а если вообще сотрет первое слово с доски, то слова с ошибками будут составлять 25%. Сколько процентов от общего количества написанных слов составляли слова с ошибками до звонка на урок?

Задача 3. От точки O отложили лучи OA , OB , OC и OD , причем $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 3\angle AOD$. Чему может быть равен $\angle AOD$?

Задача 4. В 1919 году Буратино закопал на Поле Чудес три золотые монетки. Каждый год количество закопанных монет увеличивалось на три, кроме одного очень удачного года, когда количество монет увеличилось сразу в 3 раза. В 2018 году (то есть через 99 лет) Буратино выкопал все золотые монетки. Могло ли их оказаться ровно 456?

Задача 5. Пять прямолинейных дорожек длины a в парке образуют два примыкающих сторонами равносторонних треугольника, а шесть более коротких прямолинейных дорожек длины b соединяют их центры с вершинами (см. рис.). Поливальная машина должна проехать по всем дорожкам и вернуться в начальную точку A . Какой наименьший путь она должна проделать?



Примеры работ для проведения текущего контроля

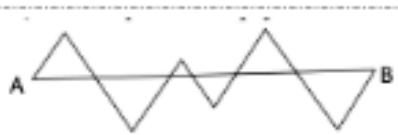
5 КЛАСС
ЗАНЯТИЕ 5.



НОВАЯ ШКОЛА

Педагог: Каленова
Анастасия Андреевна

На выбор: уровень А (основной) и В (повышенный) ТЕМА: Олимпиада

1А	Автомобиль в пробке въехал в туннель со скоростью 5м/мин. Сначала он ехал 11мин, затем стоял 2мин, затем ехал 10мин, стоял 3мин, затем 9мин ехал, 4 – стоял и так далее, пока туннель не кончился. Он достиг конца туннеля через 55мин. Какова длина туннеля?
2А	Егор выписал несколько подряд идущих двузначных чисел. Оказалось, что каждая цифра выписана хотя бы один раз. Какое минимальное количество чисел мог выписать Егор?
3А	Костя выкладывает доминошки в цепочку по правилам домино, выбирая при этом из оставшихся каждый раз доминошку с максимальной суммой точек. А) Какой длины получится цепочка? Б) Какой будет последняя доминошка в цепочке?
4А	Квадратную площадку замостили квадратной плиткой (все плитки одинаковые). К четырем сторонам площадки примыкает в общей сложности 20 плиток. Сколько всего плиток использовалось? 
1В	Ломаную из 7 звеньев с концами в точках А и В пересекли отрезком АВ. Оказалось, что все получившиеся треугольники – равносторонние. Длина отрезка АВ равна 12 дюймам. Найдите длину исходной ломаной. (Равносторонний треугольник – треугольник, у которого все стороны равны) 
2В	В Марсианском заповеднике живут драконы с тремя головами и четырьмя лапами и чучундры с пятью лапами и шестью головами. Алиса сосчитала, что всего у них 126 голов и 123 лапы. Сколько драконов и сколько чучундр живет в марсианском зоопарке?
3В	В комнате сидело 11 человек – жителей острова рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут) Первый сказал: «Среди нас есть лжец» Второй: «Среди нас есть рыцарь» Третий: «Среди нас есть 2 лжеца». Четвертый: «Среди нас есть 2 рыцаря» И так далее, Десятый: «Среди нас есть 5 рыцарей». Последний промолчал. Сколько на самом деле в комнате могло быть лжецов?
4В	В классе – 17 человек. Известно, что среди любых десяти есть хотя бы одна девочка, а мальчиков больше, чем девочек. Сколько девочек в этом классе?

На выбор: уровень А (основной) и В (повышенный)

ТЕМА: Олимпиада

- | | |
|----|---|
| 1A | В кондитерском магазине продаются конфеты трех видов: карамельки по 3 рубля, ириски по 5 рублей и шоколадки по 10 рублей. Варя хотела приобрести ровно по 8 конфет каждого вида и захватила с собой 200 рублей. Утром она увидела в магазине объявления: «При оплате трех шоколадок получи на кассе бесплатную ириску.» и «При оплате трех ирисок получи на кассе бесплатную карамельку.» Сколько денег останется у Вари? |
| 2A | Найдите любое решение ребуса $A \cdot B + A + B = \overline{AB}$. A и B — две различные цифры; запись $\overline{AB}$ означает двузначное число (то есть $A \neq 0$), составленное из цифр A и B. В качестве ответа напишите число $\overline{AB}$. |
| 3A | Во время математического тестирования Олег должен был разделить данное число на 2, а к результату прибавить 6. Но он поторопился и вместо этого умножил данное число на 2, а от результата отнял 6. Тем не менее, ответ у него получился правильный. Какое число было дано Олегу? |
| 4A | В альбоме нарисован клетчатый прямоугольник 3×7 . Робота Игоря попросили обвести все линии фломастером, и у него ушло на это 26 минут (робот рисует линии с постоянной скоростью). За сколько минут он сможет обвести фломастером все линии клетчатого квадрата 5×5 ? |
| 1B | Гонец ехал на лошади, чтобы доставить послание Илье Муромцу. В какой-то момент он заметил, что Илья Муромец прошел мимо него (и продолжает идти в противоположном направлении). Спустя 10 секунд (когда лошадь остановилась) гонец спешился и побежал догонять Илью. Через сколько секунд гонец доставит послание, если он бежит в два раза быстрее Ильи Муромца, но в пять раз медленнее скачущей лошади? |
| 2B | В королевстве живут графы, герцоги и маркизы. Однажды каждый граф сразился на дуэли с тремя герцогами и несколькими маркизами. Каждый герцог сразился на дуэли с двумя графами и шестью маркизами. Каждый маркиз сразился на дуэли с тремя герцогами и двумя графами. Известно, что все графы сразились с равным числом маркизов. Со сколькими маркизами сразился каждый граф? |
| 3B | На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 15 аборигенов, среди которых были как рыцари, так и лжецы, встали в хоровод, и каждый произнес: «Из двух людей, стоящих напротив меня, один — рыцарь, а другой — лжец». Сколько среди них рыцарей? |
| 4B | Конфеты имеют форму кубиков $1 \times 1 \times 1$. Учитель сложил из них параллелепипед $3 \times 4 \times 5$ и предложил детям угощаться. В первую минуту Петя взял одну из угловых конфет. Каждую следующую минуту дети забирали все конфеты, у которых была соседняя грань с уже отсутствующими конфетами (например, во вторую минуту забрали 3 конфеты). За сколько минут дети разобрали все конфеты? |



На выбор: уровень А (основной) и В (повышенный)

ТЕМА: Олимпиада

- 1А** В мешке лежали карточки с числами от 1 до 20. Влад вытащил 6 карточек и сказал, что все эти карточки можно разбить на пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковые. Лена успела подсмотреть 5 карточек Влада: на них были написаны числа 2, 4, 9, 17, 19. Карточку с каким числом не успела подсмотреть Лена? (Достаточно привести один подходящий ответ.)
- 2А** Аня, Боря, Вика и Гена дежурят в течение 20 дней в школе. Известно, что каждый день дежурят ровно трое из них. Аня дежурила 15 раз, Боря — 14 раз, Вика — 18 раз. Сколько раз дежурил Гена?
- 3А** На уроке физкультуры весь класс выстроился по росту (у всех детей разный рост). Дима заметил, что людей, которые выше него, в четыре раза больше, чем людей, которые ниже него. А Лёня заметил, что людей, которые выше него, в три раза меньше, чем людей, которые ниже него. Сколько всего человек в классе, если известно, что их не больше 30?
- 4А** В ряд выписано 11 чисел так, что сумма любых трех идущих подряд чисел равна 18. При этом сумма всех чисел равна 64. Найдите центральное число.
- 1В** Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин ели торт (весь торт в итоге был съеден). Дядя Фёдор съел в два раза меньше, чем Печкин, а кот Матроскин съел в два раза меньше, чем та часть торта, которую не съел Печкин. Какую долю торта съел почтальон Печкин, если Шарик съел лишь десятую часть торта? (Ответ запишите в виде десятичной дроби.)
- 2В** У Кощея Бессмертного есть 11 больших сундуков. В некоторых из них лежит по 8 средних сундуков. А в некоторых средних лежит по 8 маленьких сундуков. В сундуках больше ничего не лежит. Всего у Кощея 102 пустых сундука. Сколько всего сундуков у Кощея?
- 3В** У дракона есть 40 кучек золотых монет, в любых двух из них количество монет отличается. После того как дракон разграбил соседний город и принес еще золото, количество монет в каждой кучке увеличилось либо в 2, либо в 3, либо в 4 раза. Какое наименьшее количество различных кучек монет могло получиться?
- 4В** На одной грани игрального кубика нарисована одна точка, на другой грани — две, на третьей — три, и т. д. Четыре одинаковых игровых кубика сложены так, как показано на рисунке. Сколько в общей сложности точек находится на 6 гранях, которыми касаются кубики?





На выбор: уровень А (основной) и В (повышенный)

ТЕМА: Олимпиада

1А	Винни решил заработать и устроился на работу. Изначально у него не было денег. Каждый день он стал получать по 100 рублей. В первый день он потратил 1 рубль, в следующий 2 и т.д. Когда у Винни закончатся деньги?
2А	На праздник Петя заказал 6 пицц. За них он заплатил 1900 рублей и еще сколько-то рублей, но не больше 100. Вася сказал, что 6 пицц мало и заказал еще 16 пицц. За них Вася заплатил 5300 и еще сколько-то рублей, но не больше 100. Сколько могла стоить одна пицца? Найдите все возможные варианты.
3А	В классе за каждой партой сидят двое учеников. Парт, за которыми сидят двое мальчиков, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят две девочки. А парт, за которыми сидят две девочки, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят мальчик с девочкой. Сколько в классе мальчиков, если известно, что там 10 девочек?
4А	В четырехугольнике ABCD точка M — середина CD, также $AD \parallel BC$ и $\angle BAM = \angle MAD$. Докажите, что $\angle AMB = 90^\circ$.
1В	На доске записано натуральное число. Николай заметил, что может двумя способами приписать к нему цифру справа так, чтобы полученное число делилось на 9. Сколькими способами он может приписать к данному числу цифру справа так, чтобы полученное число делилось на 3?
2В	Клеточный прямоугольник разбили на доминошки. Оказалось, что есть ровно 9 доминошек, которые прилегают к сторонам прямоугольника. Этот же прямоугольник разбили на доминошки другим способом, и оказалось, что таких доминошек уже 14. Какие размеры могли быть у прямоугольника?
3В	Толик вычислил значение выражения $n^2 + n + 1$ для всех целых чисел от 1 до 2024. Дядя Кот вычислил значения выражения $n^2 - n + 1$ для тех же чисел. У кого произведение получившихся чисел больше и во сколько раз?
4В	В клетках таблицы 5 x 100 (5 строчек, 100 столбцов) расставлены числа от 1 до 500, каждое по одному разу. Докажите, что Бараш может переставить строчки таблицы так, чтобы в каждом столбце числа не стояли в порядке убывания сверху вниз.

Примеры работ для проведения итогового контроля

ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа»
РНОМЦ «Центр интегрируемых систем» (ЯрГУ им.П.Г.Демидова)
Контрольная работа для математических кружков (2024/2025 уч.год)

5 класс

1. Алиса за половину своих денег купила пирожное, потом за половину от оставшихся денег — мороженое, а потом за треть от оставшихся денег — конфету. В итоге у неё осталось 40 рублей. Сколько денег у Алисы было изначально?
2. В доме 36 квартир. Известно, что в 25 квартирах живёт кот, в 12 квартирах — пёс, а в 5 — и кот, и пёс. Сколько в этом доме квартир, к которых нет ни кота, ни пса?
3. У Бориса в левом кармане лежит две пятирублёвых монеты, а в правом — десятирублёвая и пятирублёвая. Укажите, какие из высказываний верны, а какие — нет:
(а) У Бориса в левом или правом кармане есть десятирублёвая монета.
(б) У Бориса в левом или в правом кармане есть пятирублёвая монета.
(в) У Бориса в левом и в правом кармане есть десятирублёвая монета.
4. В канцелярском магазине продаётся 5 видов тетрадей, 3 вида карандашей и 9 видов ручек. Сколько существует способов
(а) купить все три предмета (тетрадь, карандаш и ручку);
(б) купить какие-то два предмета из трёх;
(в) купить тетрадь и две ручки?
В качестве решения достаточно привести арифметическое выражение и ответ.
5. Пёс и Кот поспорили, кто быстрее пробежит от дома до озера. Кот бежал всю дистанцию с одной скоростью. Пёс первую половину дистанции бежал вдвое быстрее Кота, но на середине пути подвернул лапу, и оставшуюся часть пути ковылял со скоростью, в два раза меньшей скорости Кота. Кто победил в споре?
6. В мешке лежит 3 красных, 5 жёлтых и 11 синих шаров. Из него (не подглядывая) достают по одному шару. Какое минимальное число шаров нужно вытащить, чтобы среди них *гарантированно* нашлись
(а) два шара одного цвета;
(б) два шара разных цветов;
(в) шары всех цветов?
Ответ поясните.
7. За круглый стол сели 12 гномов. Некоторые из них лжецы (всегда говорят неправду), а остальные — рыцари (говорят только правду). Каждый гном сказал: «Если не считать меня и моих соседей, то все остальные за столом — лжецы.» Сколько за столом может быть гномов-рыцарей?

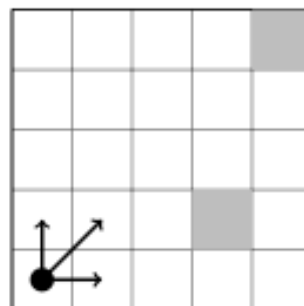
6 класс

1. (а) Найдите двузначное число, которое и при делении на 6, и при делении и на 7 даёт одинаковый остаток — число 3. (Придумайте пример и объясните, почему он подходит.)
(б) Найдите ещё одно такое двузначное число (тоже объясните, почему подходит).
2. В очереди за билетами стояли несколько пятиклассников. Между каждыми двумя соседними пятиклассниками встало по одному шестикласснику. А потом между каждыми двумя соседними школьниками встало по одному учителю, в результате в очереди оказалось 109 человек. Сколько из них шестиклассников?
3. Несколько школьников пили чай. Половина из них добавила в чай молоко, а треть добавила в чай сахар. Оказалось, что 10 школьников ничего не добавляли в чай, а 2 школьника добавили и молоко, и сахар. Сколько было школьников?
4. Фокусник Амаяк умеет превращать серебряное колечко в три золотых, а золотое колечко — в 5 серебряных. Может ли он 300 колечек превратить в 2025?
5. В классе учатся 5 мальчиков (Артем, Витя, Гриша, Дима и Егор) и 6 девочек (Катя, Маша, Надя, Оля, Юлия и Яна). Из них составляют команду из трёх человек — капитана, заместителя и дежурного. Если капитан — девочка, то заместителем должен быть мальчик, а дежурным — девочка. И наоборот, когда капитан — мальчик, то заместитель — девочка, а дежурный — мальчик. Сколькими способами можно составить команду?
6. В классе 30 учеников. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей? (Считаем, что дружба взаимная.)
7. Можно ли клетчатую доску 10×10 разрезать на четырёхклеточные фигурки, изображённые на рисунке?



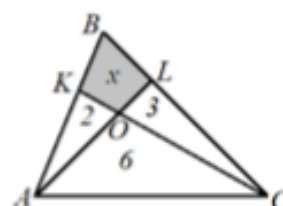
7 класс

1. По длинной прямой дороге со скоростью 60 км/ч едет автомобиль, он догоняет мотоцикл. За 20 минут до встречи между ними было 5 км. После встречи около поста ГИБДД они поехали дальше с той же скоростью. На каком расстоянии от поста ГИБДД мотоцикл будет через два часа?
2. Пароль от домофона состоит из шести цифр. Известно, что сумма любых двух соседних цифр в пароле — нечётное число. Сколько существует вариантов пароля? (Пароль может начинаться с нуля)
3. Виктор Юрьевич задумал число, умножил его на 7 и зачеркнул последнюю цифру. Затем умножил на 71, получил трехзначное число, зачеркнул в нем две первые цифры и результат умножил на 5. Получилось число 20. Что было задумано? (Найдите все возможные ответы.)
4. В противоположных углах шахматной доски 8×8 стоят две фишки. Каждым ходом обе фишки перемещаются на соседние (по стороне) клетки. Можно ли за несколько ходов сделать так, чтобы две фишки оказались в соседних клетках?
5. Чему при различных натуральных n может равняться
 - (а) $\text{НОД}(6n + 7, n + 1)$,
 - (б) $\text{НОД}(7n + 13, 2n + 4)$, Поясните ответ.
6. Пусть AF — медиана треугольника ABC , D — середина отрезка AF , E — точка пересечения прямой CD со стороной AB . Оказалось, что $BD = BF = CF$. Докажите, что $AE = DE$.
7. На доске 5×5 в левом нижнем углу стоит фишка. Каждым ходом игрок передвигает фишку на одну клетку вверх, вправо или по диагонали вправо-вверх. Алиса и Борис ходят по очереди, начинает Алиса. Проигрывает тот, кто вынужден встать на закрашенную клетку (см. рисунок снизу). Кто из игроков может победить независимо от игры соперника?



8 класс

1. По длинной прямой дороге со скоростью 60 км/ч едет автомобиль, он догоняет мотоцикл. За 20 минут до встречи между ними было 5 км. После встречи около поста ГИБДД они поехали дальше с той же скоростью. На каком расстоянии от поста ГИБДД мотоцикл будет через два часа?
2. В классе 14 мальчиков и 11 девочек. Тренер хочет составить команду из трёх мальчиков и четырёх девочек. Сколькими способами он это может сделать?
3. Две прямые делят треугольник на три треугольника и один четырехугольник. На рисунке цифрами обозначены площади треугольников. Найдите площадь четырехугольника.
4. Известно, что $\text{НОД}(a, b) = 3$. Найдите $\text{НОД}(5a + 7b, 3a + 4b)$.
5. Докажите, что для любых чисел x и y верно неравенство: $x^2 + 4xy + 8y^2 + 4y \geq -1$.
6. В квадрат со стороной 1 метр бросили 101 точку. Докажите, что какие-то пять из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.
7. На лавке стоят 13 гирь массами 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 12 кг, 13 кг. Петя и Вова играют в игру, делая ходы по очереди: за один ход можно переставить любую гирю с лавки на стол. Выигрывает тот, после чьего хода окажется, что выставленные на стол гири можно разбить на две группы с равной суммарной массой. Первым ходит Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре соперника?



Рейтинговая таблица результативности освоения дополнительной общеразвивающей программы (образец)

Рейтинговая таблица результативности освоения дополнительной общеразвивающей программы «Стратегии решения олимпиадных задач по математике» (предметные результаты)

Год обучения _____ Группа _____

№ п.п.	ФИО	Предметные результаты				Суммарный балл	Уровень освоения
		Теоретическая подготовка		Практическая подготовка			
		Уровень теоретических знаний по основным разделам учебно-тематического плана программы	Уровень владения специальной математической терминологией	Уровень умений и навыков решения нестандартных задач и задач повышенной сложности	Уровень креативности, нестандартного мышления и творческого подхода к поиску решения задач		