

Министерство образования Ярославской области  
Государственное образовательное учреждение  
дополнительного образования Ярославской области  
«Региональный образовательный центр «Новая школа»

Принята на заседании  
Педагогического совета  
ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа»  
от «16» июня 2026 года  
Протокол № 02

Утверждаю  
Директор  
ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа»  
И.С. Леонова

**Леонова Ирина  
Станиславовна**

Подписано цифровой  
подписью: Леонова Ирина  
Станиславовна  
Дата: 2026.06.17 15:06:41  
+03'00'

Дополнительная общеразвивающая программа  
естественно-научной направленности

**«Избранные главы математики»**

Возраст обучающихся: 14-18 лет

Срок реализации: 2 года

Авторы программы:  
Богомолов Юрий Викторович,  
доцент кафедры дискретного анализа  
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г.Демидова,  
кандидат физико-математических наук  
Кащенко Илья Сергеевич,  
заведующий кафедры математического  
моделирования  
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г.Демидова;  
доктор физико-математических наук,  
Преображенский Игорь Евгеньевич,  
старший преподаватель кафедры  
дифференциальных уравнений  
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г.Демидова.

Ярославль, 2026

## **Раздел №1 Комплекс основных характеристик программы**

### **1. Пояснительная записка дополнительной общеразвивающей программы «Избранные главы математики»**

В настоящее время математика является неотъемлемой частью личной и профессиональной компетенции, лежит в основе логического и аналитического стиля мышления, а также представляет собой неотъемлемый компонент многовековой общечеловеческой культуры. Это позволяет выдвигать в качестве одной из наиболее важных задач системы образования повышение доступности многоуровневого математического образования, позволяющего удовлетворить разнообразные индивидуальные образовательные потребности и в целом способствующего развитию математических компетенций.

В то же время естественная дифференциация обучающихся по склонности к мышлению различного типа предполагает создание условий для развития детей с признаками интеллектуальной одаренности в предметной области математики. Развитие математических способностей одаренных школьников, их специфических логических и алгоритмических навыков, умственной (в том числе, математической) культуры будет наиболее эффективным при соответствующей поддержке, которую обучающиеся получают в системе дополнительного образования.

Важной идеей при построении эффективной схемы организации дополнительного математического образования, ориентированной и на широкий охват потенциальной целевой аудитории, и на удовлетворение индивидуальных потребностей, является многоуровневость, позволяющая решать различные образовательные задачи и выбирать тот уровень дополнительного образования, который соответствует возможностям, интересам и текущему уровню образованности ребенка. Соответственно, эффективность системы дополнительного образования во многом зависит от того, в какой степени она позволяет организовать педагогическую поддержку интересующихся математикой обучающимся с различным начальным уровнем и с различными образовательными потребностями. Крайне важной является поддержка высокомотивированных школьников, в перспективе способных вырасти в профессиональных математиков высокого уровня, а на текущем этапе возможно достигших уже высоких образовательных результатов.

Согласно Концепции развития российского математического образования, ключевая роль отводится самостоятельному решению задач, в том числе нестандартных, новых, неожиданных. Это обеспечивает активный, деятельностный приоритет (в отличие от пассивного запоминания фактов), свойственный для математического образования. Знакомство с нестандартными математическими задачами и идеями мотивирует личность обучающегося к познанию и творчеству, создают положительный образ математики и математического творчества, а занятия в рамках системы дополнительного

образования создают благоприятные условия для развития личности ребенка, его самореализации, культурного самоопределения и интеграции в систему мировой культуры.

В основу создания авторской дополнительной общеразвивающей программы «Избранные главы математики» заложен многолетний опыт работы авторов, их практические наработки и анализ собственной педагогической деятельности по данному направлению, а также учет специфики образовательной деятельности в ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа», предполагающей участие обучающихся в олимпиадах, научно-практических конференциях и конкурсах различного уровня.

Одной из наиболее важных задач дополнительной общеразвивающей программы «Избранные главы математики», направленной на обучающихся, проявляющих высокий интерес в углубленном изучении математики, а так же мотивированных на участие в математических олимпиадах высокого уровня, является формирование навыков владения приемами, методами, способами, применимых при решении задач математических олимпиад (и других областях математической деятельности), а так же навыков самоорганизации по подготовке к математическим соревнованиям.

Настоящая программа оформлена в соответствии с «Методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (включая разноуровневые программы)», разработанные Минобрнауки России совместно с ГАОУ ВО «Московский государственный педагогический университет», ФГАУ «Федеральный институт развития образования» и АНО дополнительного профессионального образования «Открытое образование» согласно (Письмо Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 18 ноября 2015 г. N 09 3242 «О направлении информации»)

### ***1.1. Актуальность программы***

Актуальность программы в первую очередь обусловлена необходимостью выявления и поддержки наиболее способных обучающихся 13-17 лет общеобразовательных организаций Ярославля и Ярославской области, имеющих очевидную склонность к освоению дисциплин естественно-математического цикла и уже демонстрирующих высокие образовательные достижения (в том числе на математических соревнованиях различного уровня). Поэтому данная программа в первую очередь направлена на обеспечение доступности дополнительного математического образования углубленного уровня для высокомотивированных обучающихся Ярославского региона, создание условий для развития детей, поддержки их интереса к математике и другим естественнонаучным дисциплинам и областям знания.

### ***1.2. Основные идеи, подходы и принципы***

Ключевой особенностью программы является синхронное совместное обучение высокомотивированных обучающихся различного возраста по одному

тематическому плану. Дифференциация подхода к обучению школьников разного возраста осуществляется с помощью соответствующего выбора учебных заданий: для обучающихся 13-14 лет при освоении сложных математических вопросов в определённой степени используется пропедевтический подход, в рамках которого обучающиеся на примере простых задач осваивают основные понятия соответствующего раздела математики, обсуждают важные идеи и методы, используемые в данной предметной области. Соответственно, обучающиеся 15-17 лет закрепляют освоенные подходы, методы, идеи и принципы в ходе решения сложных проблемных математических задач, в том числе предлагающихся на математических олимпиадах высокого уровня.

Также важной особенностью программы является то, что в силу явно выраженной ориентированности на самостоятельное решение математических задач с последующим обсуждением, в ходе реализации программы предполагается организация учебных занятий с участием одновременно нескольких преподавателей, один из которых в рамках учебного занятия определяет общую структуру и содержание, а дополнительно привлеченные преподаватели осуществляют прием задач у обучающихся, обсуждение задач со школьниками, консультирование и помощь в формировании индивидуальной образовательной траектории. Это позволяет в значительной степени персонифицировать обучение и создать благоприятные условия для реализации индивидуальных образовательных потребностей всех обучающихся.

Педагогическая целесообразность и практическая значимость программы обусловлены следующими ее характеристиками:

- Программа естественным образом дополняет школьный курс общеобразовательной программы, ориентируясь в большей степени на изучение общих методов, идей и принципов решения математических задач,
- Программа ориентирована на высокомотивированных школьников, нуждающихся в квалифицированной педагогической поддержке и способных к изучению математики на очень высоком проблемном уровне,
- Программа включает новые области знаний, расширяющие кругозор и дающие представления о системе естественнонаучных знаний и об основных принципах научности,
- Программа стимулирует инициативу и самостоятельность обучающихся, в умственном и личностном развитии способствует реализации и развитию творческих способностей, соответствует познавательным интересам и индивидуальным образовательным запросам обучающихся.

### ***1.3. Целевая аудитория***

Дополнительная общеразвивающая программа «Избранные главы математики» рассчитана на высокомотивированных обучающихся 13-17 лет (7-11 классов) общеобразовательных учреждений. Реализация программы предполагает наличие хорошего уровня общей математической подготовки в объеме программы общеобразовательной школы для соответствующего возраста

и освоения дополнительных общеобразовательных общеразвивающих программ естественнонаучной направленности, углубляющих основной курс математики. Программа ориентирована на подготовку обучающихся к реальной практической деятельности, научно-исследовательской работе, на создание своеобразной коммуникативной среды, способствующей саморазвитию и реализации творческого потенциала.

#### 1.4. Срок, объем и форма освоения программы

Дополнительная общеразвивающая программа «Избранные главы математики» реализуется в течение 3 лет.

Общий учебно-тематический объем программы составляет 864 часов, из них:

- количество часов первого года обучения – 288
- количество часов второго года обучения - 288
- количество часов третьего года обучения – 288

| Год обучения                                                             | Количество часов | Из них     |              |
|--------------------------------------------------------------------------|------------------|------------|--------------|
|                                                                          |                  | Лекционные | Практические |
| 1 год<br><i>преимущественно обучающиеся<br/>13-15 лет (7-9 класса)</i>   | 288              | 96         | 192          |
| 2 год<br><i>преимущественно обучающиеся<br/>14-16 лет (8-10 класса)</i>  | 288              | 80         | 208          |
| 3 год<br><i>преимущественно обучающиеся<br/>16-17 лет (10-11 класса)</i> | 288              | 68         | 220          |

Дополнительная общеразвивающая программа «Избранные главы математики» предусматривает вариативность распределения академической нагрузки между теоретическими и практическими формами обучения. При реализации программы со второго года обучения варьируется количество часов, отведенных на теоретические и практические занятия. Однако даже в этом случае такое распределение носит исключительно рекомендуемый характер и может быть изменено педагогом для более эффективного решения текущих образовательных задач и более полного освоения обучающимися программного материала в соответствии с выбранным уровнем.

Уменьшение нагрузки возможно за счет сокращения времени, отводимого на изучение того или иного раздела, а также исключения ряда тем, рассматриваемых в рамках раздела учебно-тематического плана соответствующего года обучения. На основе учебно-тематического плана данной программы педагогом ежегодно составляется учебно-тематический план в объеме 36 часов, реализуемый в образовательном объединении г. Рыбинска (Приложение 1, 2)

Форма обучения: очная.

### ***1.5. Режим занятий, периодичность и продолжительность занятий***

Учебная нагрузка определяется с учетом возраста детей, года обучения. В соответствии с гигиеническими правилами и требованиями устанавливается продолжительность занятий (в академических часах), их периодичность и общее количество часов в неделю и за год.

Занятия проводятся 2 раза в неделю по 4 академических часа (по 45 минут) с обязательным 10-минутным перерывом.

### ***1.6. Особенности организации образовательного процесса***

Зачисление в учебную группу проводится круглогодично, в зависимости от наличия вакантных бюджетных мест, осуществляется при желании ребенка по рекомендации преподавателей, реализующих данную программу. Занятия проводятся преимущественно в разновозрастных группах.

Программой предусмотрено проведение лекционных и практических занятий (в большинстве случаев без явного разделения занятия между этими двумя формами).

Теоретические занятия состоят из лекций и самостоятельной работы с теоретическим материалом. В основе практических занятий лежит индивидуальное выполнение различных заданий, преимущественно направленных на решение математических задач, а также проведение групповых обсуждений и консультаций. Также практическая составляющая обогащена активными формами обучения, участием обучающихся в личных математических соревнованиях, имитирующих научно-исследовательскую деятельность и прививающих умения и навыки, свойственные будущей научной работе. Усиление научного содержания программы требует также систематического использования исследовательского метода в обучении, его следует рассматривать как такую организацию занятий, при которой обучающиеся осознают огромную значимость изучаемой проблемы, пользуются методами, понятиями для решения поставленной проблемы.

В основу реализации данной программы положены следующие основные принципы:

- изучение новых областей математики, овладение научными умениями и навыками производится в предположении строгой логической обоснованности переходов от одного раздела математики к другому, что составляет принцип систематичности и последовательности;
- в ходе занятий обучающимся сообщаются знания, основанные на проверенных и обоснованных положениях, фактах, теориях, что является основной составляющей принципа научности;
- принцип сознательности и активности, предполагающий понимание обучающимися смысла усваиваемой информации, понимание цели и значимости учебной деятельности.

## 2. Цель и задачи программы

**Цель** – Создание условий для творческого, интеллектуального развития, воспитания общей и математической культуры, формирования профессиональных компетенций, создания базы для более эффективного изучения предметов естественнонаучного цикла.

Для достижения поставленной цели необходимо решение ряда **задач**:

### 1. Образовательные задачи:

- формирование и развитие у обучающихся интереса к математике; активизация познавательной деятельности;
- углубление и расширение знаний обучающихся по математике;
- развитие математического языка и математического аппарата как средства описания и исследования окружающего мира;
- развитие способности глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- закрепление представлений об основных принципах научности и доказательности в математике.

### 2. Воспитательные задачи:

- формирование понимания роли математики в современном мире, осознания ее необходимости как элемента культуры, социальной, личной и профессиональной компетентности;
- развитие критичности мышления, воспитание самодисциплины, настойчивости, целеустремленности;
- воспитание математической культуры, в том числе как части общечеловеческой культуры.

### 3. Развивающие задачи:

- развитие логического, алгоритмического и эвристического мышления, необходимых для полноценного функционирования в современном обществе и являющихся основой профессиональных математических компетенций;
- развитие элементов алгоритмической культуры, пространственных представлений, интуиции, математического кругозора.

Перечисленные задачи, даже с учетом условного их разделения на три категории, предполагают комплексное их решение в рамках предложенной программы.

### **3. Содержание программы**

#### **Тематические разделы**

Тематические разделы, освоение которых предполагается в рамках реализации трёхгодичной программы обучения.

#### **Первый год обучения**

Содержание программы первого года обучения предполагает изучение следующих основных тематических разделов:

**1. Методы решения математических задач**

Обсуждаются основные идеи, подходы, общематематические (общенаучные) методы и принципы решения математических задач: предположения, перебор вариантов, логический вывод, получение противоречия и идея доказательства от противного, примеры и контрпримеры, идея постепенного конструирования, метод математической индукции, принцип крайнего.

**2. Алгебра и теория чисел**

Изучаются основные свойства и закономерности, связанные с целыми числами, делимостью, остатками от деления, методы решения уравнений в целых числах. Также рассматриваются избранные вопросы и задачи алгебры, не связанные с теорией чисел.

**3. Комбинаторика и теория графов**

Повторяются основные идеи и методы перечислительной комбинаторики. Обсуждаются свойства конечных графов.

**4. Многочлены**

Рассматриваются общие свойства многочленов, их корней и коэффициентов. Обсуждаются различные вопросы, связанные с делимостью и неприводимостью многочленов. Изучаются многочлены специального вида.

**5. Теоремы и задачи геометрии**

На базе школьного курса геометрии рассматриваются различные геометрические теоремы и задачи (в основном планиметрические). Также уделяется внимание специальным разделам геометрии: аффинной и проективной геометрии, геометрии масс и барицентрическим координатам, алгебраическим методам в геометрии.

**6. Комбинаторная геометрия**

Рассматриваются комбинаторные свойства геометрических объектов, конструкций из прямых, точек и плоскостей, численные характеристики данных структур, различные задачи и теоремы о разбиениях и покрытиях.

**7. Алгебраические неравенства**

Повторяются общие свойства алгебраических неравенств, рассматриваются классические неравенства (в том числе неравенства о средних), подробно изучаются различные методы доказательства алгебраических неравенств.

## 8. Математические соревнования

Ознакомление с правилами командных и личных математических соревнований. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров. Проведение соревнований.

## Второй год обучения

Программа второго года обучения предполагает изучение следующих основных тематических разделов:

### 1. Методы решения математических задач

Обсуждаются основные идеи, подходы, общематематические (общенаучные) методы и принципы решения математических задач: предположения, перебор вариантов, логический вывод, получение противоречия и идея доказательства от противного, примеры и контрпримеры, идея постепенного конструирования, метод математической индукции, принцип крайнего.

### 2. Алгебра и теория чисел

Изучаются основные свойства и закономерности, связанные с целыми числами, делимостью, остатками от деления, методы решения уравнений в целых числах. Также рассматриваются избранные вопросы и задачи алгебры, не связанные с теорией чисел.

### 3. Комбинаторика и теория графов

Повторяются основные идеи и методы перечислительной комбинаторики. Обсуждаются свойства конечных графов.

### 4. Многочлены

Рассматриваются общие свойства многочленов, их корней и коэффициентов. Обсуждаются различные вопросы, связанные с делимостью и неприводимостью многочленов. Изучаются многочлены специального вида.

### 5. Теоремы и задачи геометрии

На базе школьного курса геометрии рассматриваются различные геометрические теоремы и задачи (в основном планиметрические). Также уделяется внимание специальным разделам геометрии: аффинной и проективной геометрии, геометрии масс и барицентрическим координатам, алгебраическим методам в геометрии.

### 6. Комбинаторная геометрия

Рассматриваются комбинаторные свойства геометрических объектов, конструкций из прямых, точек и плоскостей, численные характеристики данных структур, различные задачи и теоремы о разбиениях и покрытиях.

### 7. Алгебраические неравенства

Повторяются общие свойства алгебраических неравенств, рассматриваются классические неравенства (в том числе неравенства о средних), подробно изучаются различные методы доказательства алгебраических неравенств.

### 8. Функциональные уравнения

Вводится понятие функционального уравнения, обсуждаются методы решения функциональных уравнений, в том числе специального вида (например, уравнений в многочленах).

#### 9. Математические соревнования

Ознакомление с правилами командных и личных математических соревнований. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров. Проведение соревнований.

### Третий год обучения

Программа третьего года обучения предполагает изучение следующих основных тематических разделов:

#### 1. Методы решения математических задач

Обсуждаются основные идеи, подходы, общематематические (общенаучные) методы и принципы решения математических задач: предположения, перебор вариантов, логический вывод, получение противоречия и идея доказательства от противного, примеры и контрпримеры, идея постепенного конструирования, метод математической индукции, принцип крайнего.

#### 2. Алгебра и теория чисел

Изучаются основные свойства и закономерности, связанные с целыми числами, делимостью, остатками от деления, методы решения уравнений в целых числах. Также рассматриваются избранные вопросы и задачи алгебры, не связанные с теорией чисел.

#### 3. Комбинаторика и теория графов

Повторяются основные идеи и методы перечислительной комбинаторики. Обсуждаются свойства конечных графов.

#### 4. Многочлены

Рассматриваются общие свойства многочленов, их корней и коэффициентов. Обсуждаются различные вопросы, связанные с делимостью и неприводимостью многочленов. Изучаются многочлены специального вида.

#### 5. Теоремы и задачи геометрии

На базе школьного курса геометрии рассматриваются различные геометрические теоремы и задачи (в основном планиметрические). Также уделяется внимание специальным разделам геометрии: аффинной и проективной геометрии, геометрии масс и барицентрическим координатам, алгебраическим методам в геометрии.

#### 6. Комбинаторная геометрия

Рассматриваются комбинаторные свойства геометрических объектов, конструкций из прямых, точек и плоскостей, численные характеристики данных структур, различные задачи и теоремы о разбиениях и покрытиях.

#### 7. Алгебраические неравенства

Повторяются общие свойства алгебраических неравенств, рассматриваются классические неравенства (в том числе неравенства о

средних), подробно изучаются различные методы доказательства алгебраических неравенств.

#### 8. Функциональные уравнения

Вводится понятие функционального уравнения, обсуждаются методы решения функциональных уравнений, в том числе специального вида (например, уравнений в многочленах).

#### 9. Основы математического анализа

Рассматриваются общие понятия, идеи и методы математического анализа: предел, непрерывность, дифференцируемость. Обсуждается возможность применения данных методов для решения широкого класса задач.

#### 10. Математические соревнования

Ознакомление с правилами командных и личных математических соревнований. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров. Проведение соревнований.

### 3.1. Учебно-тематический план первого года обучения

Разделы учебно-тематического плана первого года обучения разделяются на подразделы (учебные модули) и распределяются по учебному плану в зависимости от выбора текущего варианта образовательной траектории.

| № п/п | Название раздела или модуля                   | Всего | Лекции | Практика | Формы контроля                                            |
|-------|-----------------------------------------------|-------|--------|----------|-----------------------------------------------------------|
| 1.    | Методы решения математических задач: модуль 1 | 12    | 3      | 9        | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 2.    | Алгебра и теория чисел: модуль 1              | 8     | 4      | 4        | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 3.    | Комбинаторика и теория графов: модуль 1       | 8     | 4      | 4        | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 4.    | Многочлены: модуль 1                          | 4     | 3      | 1        | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа    |
| 5.    | Теоремы и задачи геометрии: модуль 1          | 8     | 3      | 5        | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 6.    | Алгебраические неравенства: модуль 1          | 8     | 3      | 5        | Фронтальный опрос, обсуждение                             |
| 7.    | Алгебра и теория чисел: модуль 2              | 8     | 4      | 4        | Фронтальный опрос, математическое соревнование            |
| 8.    | Комбинаторика и теория графов: модуль 2       | 12    | 4      | 8        | Индивидуальный опрос                                      |
| 9.    | Математические соревнования: модуль 1         | 4     | 0      | 4        | Математическое соревнование                               |
| 10.   | Методы решения математических задач: модуль 2 | 12    | 4      | 8        |                                                           |

| №<br>п/п | Название раздела или модуля                      | Всего | Лекции | Прак-<br>тика | Формы контроля                                                     |
|----------|--------------------------------------------------|-------|--------|---------------|--------------------------------------------------------------------|
| 11.      | Теоремы и задачи геометрии:<br>модуль 2          | 8     | 2      | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 12.      | Комбинаторная геометрия:<br>модуль 1             | 8     | 2      | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 13.      | Алгебра и теория чисел: модуль 3                 | 8     | 4      | 4             | Индивидуальный<br>опрос, проверочная<br>работа                     |
| 14.      | Многочлены: модуль 2                             | 4     | 1      | 3             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос,<br>контрольная работа       |
| 15.      | Алгебраические неравенства:<br>модуль 2          | 8     | 2      | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 16.      | Комбинаторика и теория графов:<br>модуль 3       | 8     | 2      | 6             | Индивидуальный<br>опрос, обсуждение                                |
| 17.      | Математические соревнования:<br>модуль 2         | 4     | 0      | 4             | Математическое<br>соревнование                                     |
| 18.      | Теоремы и задачи геометрии:<br>модуль 3          | 8     | 4      | 4             | Индивидуальный<br>опрос, проверочная<br>работа                     |
| 19.      | Комбинаторная геометрия:<br>модуль 2             | 8     | 4      | 4             | Индивидуальный опрос                                               |
| 20.      | Методы решения математических<br>задач: модуль 3 | 12    | 4      | 8             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 21.      | Алгебра и теория чисел: модуль 4                 | 12    | 4      | 8             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 22.      | Комбинаторика и теория графов:<br>модуль 4       | 8     | 4      | 4             | Контрольная работа,<br>командное<br>математическое<br>соревнование |
| 23.      | Теоремы и задачи геометрии:<br>модуль 4          | 12    | 4      | 8             | Индивидуальный<br>опрос, проверочная<br>работа                     |
| 24.      | Математические соревнования:<br>модуль 3         | 4     | 0      | 4             | Математическое<br>соревнование                                     |
| 25.      | Методы решения математических<br>задач: модуль 4 | 12    | 4      | 8             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 26.      | Комбинаторная геометрия:<br>модуль 3             | 8     | 2      | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 27.      | Алгебра и теория чисел: модуль 5                 | 12    | 4      | 8             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 28.      | Математические соревнования:<br>модуль 4         | 8     | 0      | 8             | Математическое<br>соревнование                                     |
| 29.      | Теоремы и задачи геометрии:<br>модуль 5          | 12    | 2      | 10            | Индивидуальный<br>опрос, проверочная<br>работа                     |
| 30.      | Комбинаторика и теория графов:<br>модуль 5       | 8     | 4      | 4             | Контрольная работа,<br>командное<br>математическое<br>соревнование |

| №<br>п/п | Название раздела или модуля                   | Всего      | Лекции    | Прак-<br>тика | Формы контроля                                         |
|----------|-----------------------------------------------|------------|-----------|---------------|--------------------------------------------------------|
| 31.      | Многочлены: модуль 3                          | 8          | 3         | 5             | Фронтальный и индивидуальный опрос, контрольная работа |
| 32.      | Методы решения математических задач: модуль 5 | 12         | 4         | 8             | Фронтальный и индивидуальный опрос                     |
| 33.      | Алгебраические неравенства: модуль 2          | 8          | 4         | 4             | Индивидуальный опрос                                   |
| 34.      | Математические соревнования: модуль 5         | 4          | 0         | 4             | Математическое соревнование                            |
|          | <b>ИТОГО</b>                                  | <b>288</b> | <b>96</b> | <b>192</b>    |                                                        |

### 3.2. Учебно-тематический план второго года обучения

| №<br>п/п | Название раздела или модуля                   | Всего | Лекции | Прак-<br>тика | Формы контроля                                            |
|----------|-----------------------------------------------|-------|--------|---------------|-----------------------------------------------------------|
| 1.       | Методы решения математических задач: модуль 1 | 8     | 2      | 6             | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 2.       | Алгебра и теория чисел: модуль 1              | 8     | 2      | 6             | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 3.       | Комбинаторика и теория графов: модуль 1       | 8     | 4      | 4             | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 4.       | Многочлены: модуль 1                          | 8     | 3      | 5             | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа    |
| 5.       | Функциональные уравнения: модуль 1            | 8     | 4      | 4             | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа    |
| 6.       | Теоремы и задачи геометрии: модуль 1          | 8     | 2      | 6             | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 7.       | Алгебраические неравенства: модуль 1          | 8     | 3      | 5             | Фронтальный опрос, обсуждение                             |
| 8.       | Алгебра и теория чисел: модуль 2              | 8     | 2      | 6             | Фронтальный опрос, математическое соревнование            |
| 9.       | Комбинаторика и теория графов: модуль 2       | 12    | 4      | 8             | Индивидуальный опрос                                      |
| 10.      | Математические соревнования: модуль 1         | 4     | 0      | 4             | Математическое соревнование                               |
| 11.      | Теоремы и задачи геометрии: модуль 2          | 12    | 4      | 8             | Индивидуальный опрос                                      |
| 12.      | Комбинаторная геометрия: модуль 1             | 8     | 2      | 6             | Индивидуальный опрос                                      |
| 13.      | Алгебра и теория чисел: модуль 3              | 8     | 2      | 6             | Индивидуальный опрос, проверочная работа                  |

| <b>№<br/>п/п</b> | <b>Название раздела или модуля</b>            | <b>Всего</b> | <b>Лекции</b> | <b>Прак-<br/>тика</b> | <b>Формы контроля</b>                                     |
|------------------|-----------------------------------------------|--------------|---------------|-----------------------|-----------------------------------------------------------|
| 14.              | Многочлены: модуль 2                          | 8            | 2             | 6                     | Фронтальный и индивидуальный опрос, контрольная работа    |
| 15.              | Алгебраические неравенства: модуль 2          | 8            | 2             | 6                     | Индивидуальный опрос                                      |
| 16.              | Комбинаторика и теория графов: модуль 3       | 8            | 2             | 6                     | Индивидуальный опрос, обсуждение                          |
| 17.              | Математические соревнования: модуль 2         | 4            | 0             | 4                     | Математическое соревнование                               |
| 18.              | Теоремы и задачи геометрии: модуль 3          | 8            | 2             | 6                     | Индивидуальный опрос, проверочная работа                  |
| 19.              | Комбинаторная геометрия: модуль 2             | 8            | 3             | 5                     | Индивидуальный опрос                                      |
| 20.              | Методы решения математических задач: модуль 2 | 8            | 2             | 6                     | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 21.              | Алгебра и теория чисел: модуль 4              | 8            | 2             | 6                     | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 22.              | Комбинаторика и теория графов: модуль 4       | 8            | 2             | 6                     | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 23.              | Теоремы и задачи геометрии: модуль 4          | 16           | 6             | 10                    | Индивидуальный опрос, проверочная работа                  |
| 24.              | Алгебраические неравенства: модуль 3          | 8            | 2             | 6                     | Индивидуальный опрос                                      |
| 25.              | Математические соревнования: модуль 3         | 4            | 0             | 4                     | Математическое соревнование                               |
| 26.              | Методы решения математических задач: модуль 3 | 8            | 4             | 4                     | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 27.              | Комбинаторная геометрия: модуль 3             | 8            | 2             | 6                     | Индивидуальный опрос                                      |
| 28.              | Алгебра и теория чисел: модуль 5              | 12           | 2             | 10                    | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 29.              | Функциональные уравнения: модуль 2            | 4            | 1             | 3                     | Математическое соревнование                               |
| 30.              | Теоремы и задачи геометрии: модуль 5          | 16           | 4             | 12                    | Индивидуальный опрос, проверочная работа                  |
| 31.              | Комбинаторика и теория графов: модуль 5       | 12           | 4             | 8                     | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 32.              | Многочлены: модуль 3                          | 8            | 2             | 6                     | Фронтальный и индивидуальный опрос, контрольная работа    |
| 33.              | Алгебраические неравенства: модуль 4          | 12           | 2             | 10                    | Индивидуальный опрос                                      |

| № п/п | Название раздела или модуля           | Всего      | Лекции    | Практика   | Формы контроля              |
|-------|---------------------------------------|------------|-----------|------------|-----------------------------|
| 34.   | Математические соревнования: модуль 4 | 4          | 0         | 4          | Математическое соревнование |
|       | <b>ИТОГО</b>                          | <b>288</b> | <b>80</b> | <b>208</b> |                             |

### 3.3. Учебно-тематический план третьего года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля                   | Всего | Лекции | Практика | Формы контроля                                            |
|-------|-----------------------------------------------|-------|--------|----------|-----------------------------------------------------------|
| 1.    | Методы решения математических задач: модуль 1 | 8     | 2      | 6        | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 2.    | Алгебра и теория чисел: модуль 1              | 12    | 2      | 10       | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 3.    | Комбинаторика и теория графов: модуль 1       | 8     | 2      | 6        | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 4.    | Многочлены: модуль 1                          | 8     | 2      | 6        | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа    |
| 5.    | Основы математического анализа                | 12    | 6      | 6        | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа    |
| 6.    | Функциональные уравнения: модуль 1            | 8     | 2      | 6        | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа    |
| 7.    | Теоремы и задачи геометрии: модуль 1          | 12    | 2      | 10       | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 8.    | Алгебраические неравенства: модуль 1          | 8     | 2      | 6        | Фронтальный опрос, обсуждение                             |
| 9.    | Алгебра и теория чисел: модуль 2              | 8     | 2      | 6        | Фронтальный опрос, математическое соревнование            |
| 10.   | Комбинаторика и теория графов: модуль 2       | 8     | 2      | 6        | Индивидуальный опрос                                      |
| 11.   | Математические соревнования: модуль 1         | 4     | 0      | 4        | Математическое соревнование                               |
| 12.   | Теоремы и задачи геометрии: модуль 2          | 12    | 2      | 10       | Индивидуальный опрос                                      |
| 13.   | Комбинаторная геометрия: модуль 1             | 8     | 2      | 6        | Индивидуальный опрос                                      |
| 14.   | Алгебра и теория чисел: модуль 3              | 8     | 2      | 6        | Индивидуальный опрос, проверочная работа                  |
| 15.   | Многочлены: модуль 2                          | 8     | 2      | 6        | Фронтальный и индивидуальный опрос, контрольная работа    |
| 16.   | Алгебраические неравенства: модуль 2          | 12    | 2      | 10       | Индивидуальный опрос                                      |

| №<br>п/п | Название раздела или модуля                      | Всего      | Лекции    | Прак-<br>тика | Формы контроля                                                     |
|----------|--------------------------------------------------|------------|-----------|---------------|--------------------------------------------------------------------|
| 17.      | Комбинаторика и теория графов:<br>модуль 3       | 8          | 2         | 6             | Индивидуальный<br>опрос, обсуждение                                |
| 18.      | Математические соревнования:<br>модуль 2         | 4          | 0         | 4             | Математическое<br>соревнование                                     |
| 19.      | Теоремы и задачи геометрии:<br>модуль 3          | 8          | 2         | 6             | Индивидуальный<br>опрос, проверочная<br>работа                     |
| 20.      | Комбинаторная геометрия:<br>модуль 2             | 8          | 2         | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 21.      | Методы решения математических<br>задач: модуль 2 | 8          | 2         | 6             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 22.      | Алгебра и теория чисел: модуль 4                 | 8          | 2         | 6             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 23.      | Основы математического<br>анализа: модуль 2      | 8          | 2         | 6             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 24.      | Комбинаторика и теория графов:<br>модуль 4       | 8          | 2         | 6             | Контрольная работа,<br>командное<br>математическое<br>соревнование |
| 25.      | Теоремы и задачи геометрии:<br>модуль 4          | 8          | 2         | 6             | Индивидуальный<br>опрос, проверочная<br>работа                     |
| 26.      | Алгебраические неравенства:<br>модуль 3          | 8          | 2         | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 27.      | Комбинаторная геометрия:<br>модуль 3             | 8          | 2         | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 28.      | Алгебра и теория чисел: модуль 5                 | 12         | 2         | 10            | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 29.      | Функциональные уравнения:<br>модуль 2            | 4          | 1         | 3             | Математическое<br>соревнование                                     |
| 30.      | Теоремы и задачи геометрии:<br>модуль 5          | 12         | 3         | 9             | Индивидуальный<br>опрос, проверочная<br>работа                     |
| 31.      | Основы математического<br>анализа: модуль 3      | 12         | 4         | 8             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос                              |
| 32.      | Многочлены: модуль 3                             | 8          | 2         | 6             | Фронтальный и<br>индивидуальный опрос,<br>контрольная работа       |
| 33.      | Алгебраические неравенства:<br>модуль 3          | 8          | 2         | 6             | Индивидуальный опрос                                               |
| 34.      | Математические соревнования:<br>модуль 3         | 4          | 0         | 4             | Математическое<br>соревнование                                     |
|          | <b>ИТОГО</b>                                     | <b>288</b> | <b>68</b> | <b>220</b>    |                                                                    |

## СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

### *Методы решения математических задач*

#### *Теория:*

- Предположения, метод от противного.
- Примеры, контрпримеры, конструкции.
- Метод математической индукции.
- Принцип Дирихле.
- Принцип крайнего.
- Инварианты и полуинварианты.

*Практика:* Решение задач на полный перебор случаев, возможностей, комбинаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез.

Обучающиеся знакомятся с основными (общими) принципами решения математических задач, осознают необходимость обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. В ходе лекционных занятий обучающиеся осваивают основные логические схемы рассуждения, закрепляя их при решении практических задач с устным изложением решений.

В ходе практических занятий обучающимся предлагаются задачи на полный перебор случаев, возможностей, комбинаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез. Общие принципы решения задач иллюстрируются при решении логических практических задач на работу с истинными и ложными высказываниями, утверждениями.

В основе реализации данного тематического раздела лежит решение задач на использование различных общематематических методов и принципов: метода математической индукции (применительно к задачам алгебры, теории чисел, комбинаторики, комбинаторной геометрии), принципа Дирихле, принципа крайнего, различных приемов, основанных на использовании понятий инварианта и полуинварианта. Навыки применения данных методов при решении задач в дальнейшем закрепляются при изучении отдельных (частных) тематических разделов в течение года.

Изучение метода математической индукции как общего метода решения математических задач у обучающихся первого года обучения (13-15 лет (7-9 класса) целесообразно начинать с серии заданий на последовательное конструирование примеров, начиная с малого количества элементов в соответствующих конструкциях и дальнейшему постепенному увеличению (общее понимание индукционного шага). Формальное описание принципа математической индукции рекомендуется давать несколько позже (или в последних модулях раздела, или в следующем году обучения). На втором году обучения целесообразно показать эквивалентность принципа математической

индукции и принципа наименьшего элемента в подмножествах натурального ряда (т.е. равновозможность решения задач по индукции и с использованием принципа крайнего).

Базовый материал для изучения возможностей применения инвариантов и полуинвариантов также различается для обучающихся разных возрастных групп обучающиеся 13-15 лет рассматривают задачи на инварианты, связанные с чётностью, остатками, раскрасками. Более старшие школьники рассматривают идею инварианта как замкнутость некоторого множества (алгебраической структуры) относительно разрешённых операций и отрабатывают метод анализа инвариантов и полуинвариантов через решение задач на свойства рациональных и иррациональных чисел, многочленов и их корней, свойства производных.

Большее внимание этому тематическому разделу уделяется на занятиях первого года обучения (более 20% от общего объёма программы первого года обучения): для дальнейшего освоения разделов программы необходимо чёткое понимание основных общематематических принципов, идей и методов решения задач, равно как и умение уверенно различать, что является математическим доказательством, а что не является. Таким образом, освоение этого раздела необходимо для формирования общематематической и общенаучной культуры, закрепляет понимание доказательности как ключевого компонента научного математического способа мышления. В дальнейшем (второй и третий год обучения) изучение общих методов и принципов решения математических задач как самостоятельных разделов и учебных модулей постепенно снижается, однако неявно присутствует во всех прочих тематических разделах как элемент изучения соответствующей области математики.

## ***Алгебра и теория чисел***

### ***Теория:***

- Числовые алгебраические структуры: натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа.
- Числовые функции: целая и дробная часть, округление.
- Алгебраические уравнения и их свойства.
- Свойства делимости целых чисел, остатков, сравнений по модулю, простых и составных чисел.
- Диофантовы уравнения, уравнения в простых числах.
- Мультипликативные функции. Функция Эйлера, функция Мёбиуса.
- Обобщенная малая теорема Ферма (теорема Эйлера), теорема Вильсона.
- Квадратичные вычеты. Квадратичный закон взаимности.
- Цепные дроби, основные свойства. Ряды Фарея.

***Практика:*** Решение задач на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования простых или составных чисел с указанными ограничениями. Самостоятельное решение уравнений в целых числах.

С обучающимися всех возрастных групп в рамках этого раздела обсуждаются общие закономерности, связанные с алгебраическими системами (структурами) на примере числовых структур: натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел. В младшей возрастной группе (первый год обучения) повторяются общие свойства алгебраических уравнений, а также связанные с ними понятия (область допустимых значений, корень, следствие из уравнения, равносильность уравнений). Отдельно рассматриваются специфические числовые функции, а также уравнения с их использованием.

Также повторяются (в большей степени у школьников первого года обучения) основные свойства делимости, сравнений по модулю, свойства простых и составных чисел. Обучающимся предлагаются задачи на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования простых или составных чисел с указанными ограничениями (например, бесконечность множества простых чисел определенного вида). На втором году обучения вводятся понятия квадратичного вычета и квадратичного невычета, формулируются и доказываются простейшие свойства.

Понятие мультипликативной функции для обучающихся 13-15 и 14-16 лет (первый и второй год обучения) вводится на примере функции Эйлера, для нее же доказываются основные свойства. Навыки вычисления функции Эйлера и применения обобщенной малой теоремы Ферма закрепляются обучающимися в ходе решения практических задач. Также в качестве мультипликативных функций рассматриваются суммы степеней делителей натуральных чисел.

С обучающимися разбираются общие методы решения диофантовых уравнений (линейные уравнения, метод спуска, разложение на множители, оценка), формируется навык анализа и решения линейных диофантовых уравнений. Особое внимание уделяется самостоятельному решению уравнений в целых числах, в ходе которого на практических задачах закрепляется знание свойств делимости, остатков, сравнений.

При изучении особенностей рациональных и отдельных иррациональных чисел с обучающимися второго и третьего года обучения допустимо уделить внимание цепным дробям и их свойствам, а также особым способам нумерации рациональных чисел (диагональный процесс, последовательность Фарея, дерево Штерна-Броко).

## ***Комбинаторика и теория графов***

### ***Теория:***

- Основные комбинаторные схемы выбора: перестановки, размещения, сочетания с повторениями и без повторений.
- Комбинаторные задачи на клетчатых досках и решетках.
- Комбинаторные задачи с ограничениями.
- Комбинаторика цепей и орбит.
- Конечные плоские графы, основные понятия теории графов.
- Связность графов, пути, маршруты и циклы. Обходы графов.

- Деревья и их свойства.
- Планарные и плоские графы. Основные свойства плоских графов.
- Числовые характеристики графов. Хроматические числа.

*Практика:* Решение комбинаторных задач, практических задач, направленных на закрепление знаний свойств деревьев и плоских графов, а также навыков применения данных свойств.

Предполагается, что основные комбинаторные схемы выбора, обучающиеся по предложенной образовательной программе, освоили ранее: это относится к размещениям с повторениями и без повторений, сочетаниям без повторений, перестановкам с повторениями и без них. Основной упор при актуализации понимания стандартных комбинаторных схем делается на закрепление методов подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения. Важно, чтобы обучающиеся понимали, откуда появляются все используемые соотношения для подсчёта количества комбинаций. С обучающимися первого года обучения целесообразно закрепить способы подсчета упорядоченных наборов (кортежей) и неупорядоченных наборов (подмножеств) предварительно демонстрируется на примерах, в дальнейшем выводятся общие формулы подсчета количества комбинаций указанного вида, навык использования которых развивается при решении задач. Особое внимание уделяется разбору комбинаторных задач, в которых классические комбинаторные схемы сочетаются с дополнительно вводимыми ограничениями (например, запретом на комбинации определенного вида). Также обучающимся предлагается класс комбинаторных задач, связанных с подсчетом ориентаций плоских фигур и пространственных тел (в основном правильных многогранников). На примере этого класса задач вводятся основные идеи теории групп. Алгебраические соотношения на биномиальные коэффициенты также полезно научиться доказывать разными способами, используя как алгебраические формулы для вычисления количества комбинаций, так и их комбинаторную интерпретацию, связанную с подсчётом подмножеств и кортежей.

Данные идеи и методы в дальнейшем активно используются при изучении комбинаторных свойств конечных графов. Обучающиеся изучают общие свойства графов, закрепляют умения применять графовые модели в анализе и решении задач. Рассматриваются конкретные примеры задач, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов. Вводится понятие изоморфизма графов, особое внимание уделяется топологическим свойствам графа и числовым характеристикам. Рассматриваются особые разновидности графов (деревья, плоские графы). Практические задачи направлены на закрепление знаний свойств деревьев и плоских графов, а также навыков применения данных свойств.

## ***Многочлены***

### *Теория:*

- Многочлены: основные понятия.
- Корни многочленов, кратные корни, свойства корней. Теорема Виета.
- Деление многочленов с остатком. Теорема Безу и следствия из нее.
- Интерполяционные многочлены.
- Целочисленные многочлены и многочлены с рациональными коэффициентами.
- Неприводимость многочленов.
- Многочлены над произвольными полями.
- Комбинаторная теорема о нулях.

### *Практика:* Решение практических задач.

В группе обучающихся первого года обучения изучение этого тематического раздела целесообразно начать с отработки формальных операций над многочленами: алгебраических действий, разложения на множители, анализ степеней одночленов, вычисление и оценка коэффициентов. С обучающимися третьего года обучения в рамках изучения данного раздела актуализируются основные понятия, связанные с многочленами от одной переменной (определение многочлена, коэффициенты многочлена, степень многочлена, корни, кратность корня). Отдельным понятиям вводится более строгое формальное определение. Обобщаются утверждения, ранее изученные при рассмотрении квадратичных функций (теорема Виета для многочленов произвольной степени). Вместе с этим школьники 7-8 класса могут изучить основные понятия и закономерности, связанные с квадратным трёхчленом, до того, как сделают это в рамках школьного курса алгебры.

С обучающимися второго и третьего годов обучения изучаются свойства делимости многочленов, остатков от деления. Здесь очень важно провести параллели между аналогичными свойствами делимости целых чисел, остатков от деления целых чисел (арифметические операции над остатками, свойство отношения делимости, общие свойства кольца многочленов и кольца целых чисел, простые числа и неприводимые многочлены). Предлагаются задачи на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования многочленов с указанными свойствами делимости (например, с заданным набором остатков). Отдельно доказываются специфические свойства многочленов с целочисленными и рациональными коэффициентами. Особое внимание уделяется самостоятельному решению уравнений в многочленах, в ходе которого на практических задачах закрепляется знание свойств делимости, остатков.

Также с обучающимися второго года обучения предлагается изучить основные способы построения интерполяционных многочленов и обсудить возможность их применения при решении задач. Обучающиеся 16-17 лет как правило готовы к изучению общих свойств многочленов над произвольными полями, особое внимание следует уделить переносимости на общий случай практически всех ключевых свойств многочленов от действительной

переменной. С обучающимися, демонстрирующими стабильно высокий образовательный результат, можно разобрать возможности применения комбинаторной теоремы о нулях (Combinatorial Nullstellensatz, теоремы Алона) для решения комбинаторных и теоретико-числовых задач.

### ***Теоремы и задачи геометрии***

#### ***Теория:***

- Вписанные углы, вписанные и описанные четырехугольники.
- Степень точки относительно окружности, радикальная ось, радикальный центр.
- Площади и периметры многоугольников.
- Теорема Чевы и Менелая.
- Ориентированные углы.
- Замечательные точки треугольника.
- Метод центра масс. Барицентрические координаты.
- Введение в аффинную геометрию.
- Введение в проективную геометрию.

***Практика:*** Самостоятельное решение практических задач на вычисление, построение, доказательство. Решение планиметрических задач.

Теоретическая база, необходимая для работы с данной темой, в основном изучается на уроках геометрии в общеобразовательной школе, поэтому основное внимание уделяется самостоятельному решению практических задач на вычисление, построение, доказательство. Исключение составляет изучение этого раздела на первом году обучения: в этом случае следует уделить внимание опережающему освоению основных понятий и закономерностей планиметрии с упором на самостоятельное доказательство основных лемм и теорем (в качестве основного рабочего источника рекомендуется использовать пособие М.А. Волчкевича «Уроки геометрии в задачах. 7-8 класс»).

С обучающимися второго года обучения обсуждаются свойства вписанных углов, основные свойства касательных, хорд, секущих. Отмечаются метрические соотношения и неравенства в геометрических фигурах, отрабатываются технические навыки: последовательное вычисление углов в геометрических задачах, поиск цепочек подобий, равных углов и пропорциональных отрезков. Знание рассмотренных свойств и полученные навыки закрепляются при решении задач. Основными методами решения задач, на которые делается особый упор в данной группе, являются подсчет углов в многоугольниках (в том числе вписанных или описанных), а также применение свойств подобных треугольников.

Вводится понятие аффинного преобразования плоскости, описываются общие свойства аффинных преобразований. Особое внимание уделяется анализу инвариантов аффинных преобразований (параллельность, отношения направленных отрезков), выделяется предмет изучения аффинной геометрии. Приводятся примеры аффинных преобразований (растяжение, сдвиг и т.д.),

доказывается выполнимость всех свойств аффинных преобразований для указанных примеров преобразований плоскости.

Аналогичным образом вводятся основные понятия и обсуждаются ключевые идеи проективной геометрии: общие свойства проективных преобразований, инварианты преобразований (двойное отношение), гармонические четверки точек, принцип двойственности в проективной геометрии. Данные понятия и свойства закрепляются при решении планиметрических задач. Допускается также продемонстрировать основные приемы решения планиметрических задач, связанные с выходом в пространство и рассмотрением проективных преобразований.

Наиболее важную роль при изучении данной темы играет самостоятельное решение планиметрических задач, в которых использование свойств аффинных и проективных преобразований или позволяют получить быстрое и изящное решение, или является важным этапом в работе над задачей, позволяющим значительно упростить формулировку и свести к задаче, эффективно решаемой стандартными средствами.

Для доказательства конкурентности прямых и коллинеарности точек используются теоремы Чевы и Менелая. Также для изучения свойств конфигураций прямых и точек используются избранные теоремы проективной геометрии (теоремы Дезарга и Паппа), доказываемые средствами классической планиметрии. Доказательства всех необходимых теорем и вспомогательных фактов проводятся школьниками самостоятельно.

## ***Комбинаторная геометрия***

### *Теория:*

- Системы точек, прямых и отрезков
- Наибольшее и наименьшее расстояние, угол, площадь
- Геометрические задачи на максимум и минимум
- Диаметр и радиус множества
- Выпуклые множества и их свойства. Теорема Хелли
- Окраска прямой, плоскости и их частей
- Решётчатые многоугольники

*Практика:* Решение задач на максимумы и минимумы в геометрии, задачи на разрезание и покрытие фигур, наибольшие и наименьшие расстояния на прямой или на плоскости, окраску плоскости и её частей.

Для изучения комбинаторных свойств геометрических объектов и решение задач на взаимное расположение геометрических фигур обучающиеся должны владеть соответствующей геометрической базой. Как правило, для этого вполне достаточно знания планиметрии в объёме школьной программы и, хотя бы интуитивных представлений о стереометрии.

Изучение основ комбинаторной геометрии позволяют закрепить навыки использования освоенных общематематических методов решения задач: метода математической индукции (по количеству точек, прямых, фигур и других

объектов), принципа крайнего (рассмотрение наибольших и наименьших расстояний, углов или площадей, обоснование утверждений через полученные противоречия с оптимальностью выбранных объектов). Найденные закономерности закрепляются при решении задач на максимумы и минимумы в геометрии.

Обучающиеся первого года обучения решают задачи на разрезание и покрытие фигур, наибольшие и наименьшие расстояния на прямой или на плоскости (для обоснования зачастую достаточно общих свойств алгебраических неравенств и неравенства треугольника), окраску плоскости и её частей. Обучающиеся второго и третьего годов обучения могут строго обосновать формулу Пика и некоторые другие закономерности, связанные с решётчатыми многоугольниками (оценка узлов внутри и на границе фигуры, узлов на диагоналях, многоугольники специального вида с вершинами в узлах). Полезным способом решения задач комбинаторной геометрии, связанных с выпуклыми множествами, является применение теоремы Хелли, которую обучающиеся второго года обучения могут доказать для прямой и плоскости.

### ***Алгебраические неравенства***

#### ***Теория:***

- Алгебраические неравенства и их свойства.
- Средние величины, неравенства о средних, классические неравенства.
- Метод Штурма в доказательстве неравенств.
- Частные методы доказательства неравенств: замена переменных, использование свойств линейности, использование методов математического анализа.
- Выпуклость и неравенство Йенсена.
- Введение в теорию мажоризации. Неравенство Мюрхеда, неравенство Караматы.

***Практика:*** Решение практических задач.

Рассматриваются и отрабатываются при самостоятельном решении задач основные способы доказательства алгебраических неравенств (группировка, разложение на множители, выделение полного квадрата). Обучающимися самостоятельно доказываются неравенства о средних для малого количества аргументов, после чего данные свойства обобщаются на случай произвольного количества аргументов, доказываются и обсуждаются с участием преподавателя. В ходе решения задач обучающиеся вырабатывают навыки выявления средних величин в алгебраическом выражении и использования неравенств о средних для доказательства алгебраических неравенств.

С обучающимися первого года обучения работу над изучением тематического раздела целесообразно начать с задач на выделение полного квадрата, неравенства о средних для двух переменных, а также транснеравенства. Неравенство о средних с обучающимися 13-15 лет рекомендуется доказать также для степеней двойки (продемонстрировав

возможность применения метода математической индукции), а в дальнейшем и для произвольной степени (здесь интересно показать идею шага индукции в противоположном направлении).

Обучающиеся второго года обучения знакомятся с методом Штурма доказательства алгебраических неравенств, приобретают навык применения метода в ходе решения практических задач.

Доказанные (с помощью неравенств о средних) свойства для некоторых симметрических многочленов обобщаются на более общий случай. Обучающиеся отрабатывают навыки выделения в симметрическом неравенстве элементарных составляющих и дальнейшего применения неравенства Мюрхеда к выделенным компонентам.

Рассмотрение некоторых методов мажоризации проводится на базе изученных основ математического анализа (необходимо это учитывать в распределении конкретного материала по учебным модулям). В частности, изучение базовых свойств выпуклых функций получает естественное следствие в форме рассмотрения неравенства Йенсена. Обучающиеся третьего года обучения имеют возможность использовать для обоснования выпуклости свойства производной. Возможности применения неравенства Йенсена иллюстрируются примерами более оптимального доказательства ранее рассмотренных фактов, сведения отдельных классических неравенств к неравенству Йенсена. В качестве обобщения неравенства Йенсена рассматривается неравенство Караматы, при изучении возможностей применения которого учащиеся обобщают и знания о непрерывных функциях, и свойства отношения мажоризации, введенного при рассмотрении неравенства Мюрхеда. Углубленное изучение данной темы реализуется в ориентации обучающихся на строгое математическое обоснование гипотез, а также подкрепляется решением практических задач повышенной сложности (в том числе предметных олимпиад высокого уровня).

### **Функциональные уравнения**

*Теория:*

- Понятие функционального уравнения и его решения.
- Замена переменной и функции.
- Решение функциональных уравнений методом подстановок.
- Идеи непрерывности в функциональных уравнениях.
- Уравнения Коши и Эйлера.
- Уравнения в многочленах.
- Системы функциональных уравнений.
- Функциональные неравенства.

*Практика:* Решение практических задач.

Тематический раздел «Функциональные уравнения» вводится для обучающимся не раньше второго года обучения: к этому времени формируется само понятие функции, а ребята знакомятся с основными связанными понятиями

(функция, аргумент функции, значения функции, область определения и область значений, возрастание и убывание функций) и приобретают навык оперирования функциями как алгебраическими объектами. На основе этих базовых знаний рассматривается понятие функционального уравнения, подробно обсуждаются основные понятия: решение функционального уравнения, частное решение, общее решение, серии решений.

В основном обучающиеся изучают общие методы решения функциональных уравнений и приемы, упрощающие поиск решения: замену переменных или функций, решение уравнений методом подстановок, использование аналогичных подходов при решении систем функциональных уравнений. Демонстрируются возможности решения функциональных уравнений с особыми ограничениями на функции с использованием различных методов математического анализа (непрерывность, дифференцируемость функций). Аналогичные методы в дальнейшем рассматриваются при решении функциональных неравенств.

Также обучающимся предлагаются некоторые специфические методы, применимые при решении функциональных уравнений в многочленах. Навыки применения таких приемов закрепляются при решении практических задач.

### ***Основы математического анализа***

#### ***Теория:***

- Дискретные процессы. Дискретная непрерывность.
- Последовательности: основные понятия.
- Предел последовательности. Свойства предела.
- Верхние и нижние грани множеств. Отделимость множеств.
- Теорема Больцано-Вейерштрасса.
- Критерий Коши для последовательностей.
- Основные понятия теории функции действительного переменного.
- Непрерывные функции в точке и на отрезке.
- Идеи непрерывности в геометрии и комбинаторной геометрии.

***Практика:*** Решение практических задач.

Раздел «Основы математического анализа» как самостоятельный учебный блок в рамках программы вводится для обучающихся третьего года обучения. В то же время некоторые важные понятия разумно рассмотреть и с более младшими школьниками (в том числе первого года обучения) при изучении полезной идеи дискретной непрерывности: можно отметить возрастание и убывание наблюдаемой величины (при изучении инвариантов и полуинвариантов), теорему о промежуточном значении.

В качестве моделей, приводящих к понятию дискретного процесса, используются турниры (разбитые на игры и туры), игровые задачи на клетчатом поле (одномерном или двумерном), процессы на целочисленной прямой (блуждания). При этом формируется навык анализа дискретных процессов – принимаемых параметром значений, оценка минимального и максимального

значения, множества значений параметра (функции). Интуитивно вводится понятие дискретной непрерывности как близость значений функции (состояния процесса) при минимальных изменениях параметра (дискретного времени).

Для процессов, характеризующихся свойством дискретной непрерывности, вводится дискретный аналог теоремы Больцано-Коши. Знание введенных понятий и идей, а также умение их использовать при анализе процессов закрепляется в ходе решения практических задач.

На основе имеющегося у обучающихся представления о частных случаях последовательностей (арифметической и геометрической прогрессии) вводится общее понятие числовой последовательности (второй год обучения). Рассматривается понятие предела последовательности, обсуждаются и обосновываются основные свойства сходящихся последовательностей. Затрагиваются вопросы неконструктивного обоснования сходимости числовых последовательностей.

Общее представление о непрерывной функции вводится (с обучающимися второго и третьего года обучения) как базовое понятие, лежащее в основе школьного курса алгебры и начал математического анализа. Четко формулируются понятия предела функции в точке и на бесконечности, непрерывности функции в точке и на отрезке, строго обосновываются свойства сходящихся и непрерывных функций. Обсуждаемые свойства непрерывных функций используются для решения функциональных уравнений. Также изученные свойства непрерывных функций используются для решения избранных задач планиметрии и комбинаторной геометрии на плоскости (обосновываются свойства, связанные с равновеликостью и изопериметричностью при разбиении фигуры). Некоторые теоремы из анализа функций нескольких переменных используются в качестве необходимой теоретической базы для других тематических разделов (в частности, корректное решение некоторых оптимизационных задач предполагает существование минимума или максимума рассматриваемой функции на заданной области аргументов, доказательство этого существования зачастую основывается на соответствующих теоремах математического анализа).

## ***Математические соревнования***

### *Содержание темы:*

- Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки.
- Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.
- Проведение соревнований.

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Обучающиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

## СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

### Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач

#### *Содержание раздела:*

- Предположения, метод от противного.
- Примеры, контрпримеры, конструкции.
- Метод математической индукции.
- Принцип Дирихле.
- Принцип крайнего.
- Инварианты и полуинварианты.

Обучающиеся знакомятся с основными (общими) принципами решения математических задач, осознают необходимость обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. В ходе лекционных занятий обучающиеся осваивают основные логические схемы рассуждения, закрепляя их при решении практических задач с устным изложением решений.

В ходе практических занятий обучающимся предлагаются задачи на полный перебор случаев, возможностей, комбинаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез. Общие принципы решения задач иллюстрируются при решении логических практических задач на работу с истинными и ложными высказываниями, утверждениями.

В основе реализации данного тематического раздела лежит решение задач на использование различных общематематических методов и принципов: метода математической индукции (применительно к задачам алгебры, теории чисел, комбинаторики, комбинаторной геометрии), принципа Дирихле, принципа крайнего, различных приемов, основанных на использовании понятий инварианта и полуинварианта. Навыки применения данных методов при решении задач в дальнейшем закрепляются при изучении отдельных (частных) тематических разделов в течение года.

### Тематический раздел 2. Алгебра и теория чисел

#### *Содержание раздела:*

- Числовые алгебраические структуры: натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа.
- Числовые функции: целая и дробная часть, округление.
- Алгебраические уравнения и их свойства.
- Свойства делимости целых чисел, остатков, сравнений по модулю, простых и составных чисел.
- Диофантовы уравнения, уравнения в простых числах.
- Мультипликативные функции. Функция Эйлера, функция Мёбиуса.

- Обобщенная малая теорема Ферма (теорема Эйлера), теорема Вильсона.
- Квадратичные вычеты. Квадратичный закон взаимности.
- Цепные дроби, основные свойства. Ряды Фарея.

Обсуждаются общие закономерности, связанные с алгебраическими системами (структурами) на примере числовых структур: натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел. Повторяются общие свойства алгебраических уравнений, а также связанные с ними понятия (область допустимых значений, корень, следствие из уравнения, равносильность уравнений). Отдельно рассматриваются специфические числовые функции, а также уравнения с их использованием.

Повторяются основные свойства делимости, сравнений по модулю, свойства простых и составных чисел. Обучающимся предлагаются задачи на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования простых или составных чисел с указанными ограничениями (например, бесконечность множества простых чисел определенного вида). Вводятся понятия квадратичного вычета и квадратичного невычета, формулируются и доказываются простейшие свойства.

Понятие мультипликативной функции вводится на примере функции Эйлера, для нее же доказываются основные свойства. Навыки вычисления функции Эйлера и применения обобщенной малой теоремы Ферма закрепляются учащимися в ходе решения практических задач. Также в качестве мультипликативных функций рассматриваются суммы степеней делителей натуральных чисел.

С обучающимися разбираются общие методы решения диофантовых уравнений (линейные уравнения, метод спуска, разложение на множители, оценка), формируется навык анализа и решения линейных диофантовых уравнений. Особое внимание уделяется самостоятельному решению уравнений в целых числах, в ходе которого на практических задачах закрепляется знание свойств делимости, остатков, сравнений.

При изучении особенностей рациональных и отдельных иррациональных чисел допустимо уделить внимание цепным дробям и их свойствам.

### **Тематический раздел 3. Комбинаторика и теория графов**

*Содержание раздела:*

- Основные комбинаторные схемы выбора: перестановки, размещения, сочетания с повторениями и без повторений.
- Комбинаторные задачи на клетчатых досках и решетках.
- Комбинаторные задачи с ограничениями.
- Комбинаторика цепей и орбит.
- Конечные плоские графы, основные понятия теории графов.
- Связность графов, пути, маршруты и циклы. Обходы графов.
- Деревья и их свойства.
- Планарные и плоские графы. Основные свойства плоских графов.
- Числовые характеристики графов. Хроматические числа.

Основной упор при изучении стандартных комбинаторных схем делается на закрепление методов подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения. Способ подсчета упорядоченных наборов (кортежей) и неупорядоченных наборов (подмножеств) предварительно демонстрируется на примерах, в дальнейшем выводятся общие формулы подсчета количества комбинаций указанного вида, навык использования которых закрепляется при решении задач. Особое внимание уделяется разбору комбинаторных задач, в которых классические комбинаторные схемы сочетаются с дополнительно вводимыми ограничениями (например, запретом на комбинации определенного вида). Также обучающимся предлагается класс комбинаторных задач, связанных с подсчетом ориентаций плоских фигур и пространственных тел (в основном правильных многогранников). На примере этого класса задач вводятся основные идеи теории групп.

Данные идеи и методы в дальнейшем активно используются при изучении комбинаторных свойств конечных графов. Обучающиеся изучают общие свойства графов, закрепляют умения применять графовые модели в анализе и решении задач. Рассматриваются конкретные примеры задач, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов. Вводится понятие изоморфизма графов, особое внимание уделяется топологическим свойствам графа и числовым характеристикам. Рассматриваются особые разновидности графов (деревья, плоские графы). Практические задачи направлены на закрепление знаний свойств деревьев и плоских графов, а также навыков применения данных свойств.

## **Тематический раздел 4. Многочлены**

### *Содержание раздела:*

- Многочлены: основные понятия.
- Корни многочленов, кратные корни, свойства корней. Теорема Виета.
- Деление многочленов с остатком. Теорема Безу и следствия из нее.
- Целочисленные многочлены и многочлены с рациональными коэффициентами.
- Неприводимость многочленов.

Повторяются основные понятия, связанные с многочленами (определение многочлена, коэффициенты многочлена, степень многочлена, корни, кратность корня). Отдельным понятиям дается более строгое формальное определение. Обобщаются утверждения, ранее изученные при рассмотрении квадратичных функций (теорема Виета для многочленов произвольной степени).

Изучаются свойства делимости многочленов, остатков от деления. Проводятся параллели между аналогичными свойствами делимости целых чисел, остатков от деления целых чисел (арифметические операции над остатками, свойство отношения делимости, общие свойства кольца многочленов и кольца целых чисел, простые числа и неприводимые многочлены). Предлагаются задачи на конструктивные и неконструктивные методы

доказательства существования многочленов с указанными свойствами делимости (например, с заданным набором остатков). Отдельно доказываются специфические свойства многочленов с целочисленными и рациональными коэффициентами. Особое внимание уделяется самостоятельному решению уравнений в многочленах, в ходе которого на практических задачах закрепляется знание свойств делимости, остатков.

## **Тематический раздел 5. Избранные теоремы и задачи геометрии**

*Содержание раздела:*

- Вписанные углы, вписанные и описанные четырехугольники.
- Степень точки относительно окружности, радикальная ось, радикальный центр.
- Площади и периметры многоугольников.
- Теорема Чебы и Менелая.
- Ориентированные углы.
- Замечательные точки треугольника.
- Метод центра масс. Барицентрические координаты.
- Введение в аффинную геометрию.
- Введение в проективную геометрию.

Теоретическая база, необходимая для работы с данной темой, в основном вводится на уроках геометрии в общеобразовательной школе, поэтому основное внимание уделяется самостоятельному решению практических задач на вычисление, построение, доказательство.

Обсуждаются свойства вписанных углов, основные свойства касательных, хорд, секущих. Отмечаются метрические соотношения и неравенства в геометрических фигурах. Отрабатываются технические навыки: последовательное вычисление углов в геометрических задачах, поиск цепочек подобий, равных углов и пропорциональных отрезков. Знание рассмотренных свойств и полученные навыки закрепляются при решении задач. Основными методами решения задач, на которые делается особый упор в данной группе, являются подсчет углов в многоугольниках (в том числе вписанных или описанных), а также применение свойств подобных треугольников.

Вводится понятие аффинного преобразования плоскости, описываются общие свойства аффинных преобразований. Особое внимание уделяется анализу инвариантов аффинных преобразований (параллельность, отношения направленных отрезков), выделяется предмет изучения аффинной геометрии. Приводятся примеры аффинных преобразований (растяжение, сдвиг и т.д.), доказываются выполнимость всех свойств аффинных преобразований для указанных примеров преобразований плоскости.

Аналогичным образом вводятся основные понятия и обсуждаются ключевые идеи проективной геометрии: общие свойства проективных преобразований, инварианты преобразований (двойное отношение), гармонические четверки точек, принцип двойственности в проективной геометрии. Данные понятия и свойства закрепляются при решении

планиметрических задач. Допускается также продемонстрировать основные приемы решения планиметрических задач, связанные с выходом в пространство и рассмотрением проективных преобразований.

Наиболее важную роль при изучении данной темы играет самостоятельное решение планиметрических задач, в которых использование свойств аффинных и проективных преобразований или позволяют получить быстрое и изящное решение, или является важным этапом в работе над задачей, позволяющим значительно упростить формулировку и свести к задаче, эффективно решаемой стандартными средствами.

Для доказательства конкурентности прямых и коллинеарности точек используются теоремы Чебы и Менелая. Также для изучения свойств конфигураций прямых и точек используются избранные теоремы проективной геометрии (теоремы Дезарга и Паппа), доказываемые средствами классической планиметрии. Доказательства всех необходимых теорем и вспомогательных фактов проводятся школьниками самостоятельно.

## **Тематический раздел 6. Алгебраические неравенства**

*Содержание раздела:*

- Алгебраические неравенства и их свойства.
- Средние величины, неравенства о средних, классические неравенства.
- Метод Штурма в доказательстве неравенств.
- Частные методы доказательства неравенств: замена переменных, использование свойств линейности, использование методов математического анализа.
- Выпуклость и неравенство Йенсена.
- Введение в теорию мажоризации. Неравенство Мюрхеда, неравенство Караматы.

Рассматриваются и отрабатываются при самостоятельном решении задач основные способы доказательства алгебраических неравенств (группировка, разложение на множители, выделение полного квадрата). Обучающимися самостоятельно доказываются неравенства о средних для малого количества аргументов, после чего данные свойства обобщаются на случай произвольного количества аргументов, доказываются и обсуждаются с участием преподавателя. В ходе решения задач обучающиеся вырабатывают навыки выявления средних величин в алгебраическом выражении и использования неравенств о средних для доказательства алгебраических неравенств.

На примерах учащиеся знакомятся с методом Штурма доказательства алгебраических неравенств, приобретают навык применения метода в ходе решения практических задач.

Доказанные (с помощью неравенств о средних) свойства для некоторых симметрических многочленов обобщаются на более общий случай. Обучающиеся отрабатывают навыки выделения в симметрическом неравенстве элементарных составляющих и дальнейшего применения неравенства Мюрхеда к выделенным компонентам.

Изучение базовых свойств выпуклых функций получает естественное следствие в форме рассмотрения неравенства Йенсена. Возможности применения неравенства Йенсена иллюстрируются примерами более оптимального доказательства ранее рассмотренных фактов, сведения отдельных классических неравенств к неравенству Йенсена. В качестве обобщения неравенства Йенсена рассматривается неравенство Караматы, при изучении возможностей применения которого учащиеся обобщают и знания о непрерывных функциях, и свойства отношения мажоризации, введенного при рассмотрении неравенства Мюрхеда. Углубленное изучение данной темы реализуется в ориентации учащихся на строгое математическое обоснование гипотез, а также подкрепляется решением практических задач повышенной сложности (в том числе предметных олимпиад высокого уровня).

## **Тематический раздел 7. Функциональные уравнения**

*Содержание раздела:*

- Понятие функционального уравнения и его решения.
- Замена переменной и функции.
- Решение функциональных уравнений методом подстановок.
- Идеи непрерывности в функциональных уравнениях.
- Уравнения Коши и Эйлера.
- Уравнения в многочленах.
- Системы функциональных уравнений.
- Функциональные неравенства.

Рассматривается понятие функционального уравнения, подробно обсуждаются основные понятия: решение функционального уравнения, частное решение, общее решение, серии решений.

В основном обучающиеся изучают общие методы решения функциональных уравнений и приемы, упрощающие поиск решения: замену переменных или функций, решение уравнений методом подстановок, использование аналогичных подходов при решении систем функциональных уравнений. Демонстрируются возможности решения функциональных уравнений с особыми ограничениями на функции с использованием различных методов математического анализа (непрерывность, дифференцируемость функций). Аналогичные методы в дальнейшем рассматриваются при решении функциональных неравенств.

Также обучающимся предлагаются некоторые специфические методы, применимые при решении функциональных уравнений в многочленах. Навыки применения таких приемов закрепляются при решении практических задач.

## **Тематический раздел 8. Основы математического анализа**

*Содержание раздела:*

- Дискретные процессы. Дискретная непрерывность.
- Последовательности: основные понятия.
- Предел последовательности. Свойства предела.

- Верхние и нижние грани множеств. Отделимость множеств.
- Теорема Больцано-Вейерштрасса.
- Критерий Коши для последовательностей.
- Основные понятия теории функции действительного переменного.
- Непрерывные функции в точке и на отрезке.
- Идеи непрерывности в геометрии и комбинаторной геометрии.

В качестве моделей, приводящих к понятию дискретного процесса, используются турниры (разбитые на игры и туры), игровые задачи на клетчатом поле (одномерном или двумерном), процессы на целочисленной прямой (блуждания). При этом формируется навык анализа дискретных процессов – принимаемых параметром значений, оценка минимального и максимального значения, множества значений параметра (функции). Интуитивно вводится понятие дискретной непрерывности как близость значений функции (состояния процесса) при минимальных изменениях параметра (дискретного времени). Для процессов, характеризующихся свойством дискретной непрерывности, вводится дискретный аналог теоремы Больцано-Коши. Знание введенных понятий и идей, а также умение их использовать при анализе процессов закрепляется в ходе решения практических задач.

На основе имеющегося у школьников представления о частных случаях последовательностей (арифметической и геометрической прогрессии) вводится общее понятие числовой последовательности. Рассматривается понятие предела последовательности, обсуждаются и обосновываются основные свойства сходящихся последовательностей. Затрагиваются вопросы неконструктивного обоснования сходимости числовых последовательностей.

Общее представление о непрерывной функции вводится как базовое понятие, лежащее в основе школьного курса алгебры и начал математического анализа. Четко формулируются понятия предела функции в точке и на бесконечности, непрерывности функции в точке и на отрезке, строго обосновываются свойства сходящихся и непрерывных функций. Обсуждаемые свойства непрерывных функций используются для решения функциональных уравнений. Также изученные свойства непрерывных функций используются для решения избранных задач планиметрии и комбинаторной геометрии на плоскости (обосновываются свойства, связанные с равновеликостью и изопериметричностью при разбиении фигуры).

## **Тематический раздел 9. Математические соревнования**

*Содержание темы:*

- Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки.
- Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.
- Проведение соревнований.

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Обучающиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

#### **4. Планируемые результаты**

Предполагаемыми результатами реализации программы являются:

- развитие интереса к математике, активизация познавательной деятельности, интерес к продолжению дополнительных систематических занятий математикой;
- формирование математических компетенций, овладение новыми идеями и методами решения математических задач, развитие навыков научной математической деятельности;
- повышение общего интеллектуального и математического уровня обучающихся;
- развитие математической интуиции, логического мышления, формирование и развитие математической культуры;
- формирование умений адекватного и эффективного применения изученных методов и принципов в решении практических задач, а также умения представления достигнутых результатов в сочетании с их обсуждением;
- усвоение и умение применять ряд приемов решения олимпиадных задач, видение новых приемов решения задач.

### **Раздел №2 Комплекс организационно-педагогических условий**

#### **1. Календарный учебный план**

Количество учебных недель: 36

Количество учебных дней: 72

Периоды обучения: сентябрь-декабрь, январь-июнь

#### **2. Условия реализации программы**

##### **2.1. Материально-техническое обеспечение**

Материально-техническая база соответствует санитарным и противопожарным нормам, нормам охраны труда.

Для реализации дополнительной общеразвивающей программы «Избранные главы математики» необходимый перечень учебных аудиторий и материально-технического обеспечения включает в себя:

- учебные столы/парты, стулья для обучающихся;
- стол, стул для педагога;
- доска меловая или маркерная (мел, маркеры для доски);
- технические средства обучения (компьютер/ноутбук) с подключением к сети Интернет;
- комплекты индивидуальных раздаточных материалов для обучающихся.

##### **2.2. Кадровое обеспечение**

Настоящая программа может быть реализована педагогом дополнительного образования или учителем, имеющими высшее

профессиональное образование в области математики. Желателен опыт работы с одаренными детьми, умение стимулировать их познавательную активность, поддерживать различные виды интеллектуальной и творческой деятельности; наличие высокого потенциала и способностей к профессиональному саморазвитию и самосовершенствованию.

### **3. *Формы аттестации***

Неотъемлемой частью образовательного процесса является аттестация результатов освоения обучающими дополнительной общеразвивающей программы «Избранные главы математики» т.к. она выполняет учебную, воспитательную, развивающую, коррекционную и социально-психологическую функцию.

В рамках освоения программы предусмотрена начальная, текущая, промежуточная и итоговая оценка образовательных результатов.

Текущий контроль усвоения материала осуществляется на основе проверочных, контрольных работ, промежуточных олимпиад. Предусматривается дифференцированный итоговый контроль: итоговая контрольная работа, очный зачет, математические олимпиады различного уровня.

### **4. Методические материалы**

#### **4.1. *Формы организации образовательного процесса и учебных занятий***

В ходе реализации дополнительной общеразвивающей программы «Избранные главы математики» на учебных занятиях наравне с индивидуальной, групповой, фронтальной формами обучения, широко используются и такие как самообразование и саморазвитие обучающихся.

Программой предусмотрено проведение теоретических и практических учебных занятий (в большинстве случаев без явного разделения между этими двумя формами).

Теоретические занятия предполагают изложение педагогом теоретического материала и самостоятельную работу обучающихся с учебной литературой. В основе практических занятий лежит индивидуальное выполнение обучающимися различных заданий, преимущественно направленных на решение математических задач, а также проведение групповых обсуждений и консультаций.

Типы заданий, используемых в практике:

- Задачи на логический вывод и логическое обоснование, выдвигаемых гипотез, полный перебор комбинаций истинности и ложности высказываний.
- Задачи на соответствия, на разбиение на пары, на чередования.
- Оптимизационные задачи.
- Задачи на построение точных оценок.

- Алгоритмические задачи.
- Переборные задачи.
- Клетчатые доски и таблицы.

Наряду с этим, практическая составляющая обогащена активными формами обучения, участием детей в личных математических соревнованиях, имитирующих научно-исследовательскую деятельность и прививающих умения и навыки, свойственные будущей научной работе.

Усиление научного содержания программы требует также систематического использования исследовательского метода в обучении, его следует рассматривать как такую организацию занятий, при которой обучающиеся осознают огромную значимость изучаемой проблемы, пользуются методами, понятиями для решения поставленной проблемы.

Структура и содержание отдельного занятия выстраивается вокруг задач для самостоятельного решения школьниками. Комплект («листок», «пакет») разноуровневых нестандартных задач является смысловым стержнем занятия: самостоятельно выполняя нестандартные задания, обучающиеся осваивают новые для них идеи и принципы. При этом новый теоретический материал, математические понятия, утверждения, основы новых (для детей) отраслей математики не декларируются педагогом, а вводятся совершенно естественным путём на основе прикладного проблемно-ориентированного подхода, ложатся на подготовленную почву и эффективно усваиваются обучающимися.

### **Система листков: общая информация**

Основные принципы построения учебного занятия математического объединения, в большинстве случаев используемые сейчас в системе дополнительного образования детей, сформировались к концу 30-х годов XX века. Именно тогда практика показала, что попытки в чистом виде перенести в систему дополнительного образования сложившиеся стили организации учебной или профессиональной математической деятельности (лекционные курсы, практические семинары, научные семинары с докладами участников) показывают свою неэффективность. В то же время достаточно продуктивным оказался подход, в котором занятие детского математического объединения строится вокруг самостоятельного решения обучающимися математических задач.

Дальнейшее развитие этот принцип получил в 60-е годы в разработанном Н. Н. Константиновым методе листков (отметим, что внедрён он был в практику работы средней школы, однако сейчас более активно применяется именно в рамках системы дополнительного математического образования).

Суть метода заключается в том, что каждый обучающийся в начале занятия получает листок, в котором (возможно) содержатся некоторые основные определения и формулировки математических утверждений (лемм, теорем), а также задачи, подобранные в соответствии с тематикой занятия. Обучающийся самостоятельно изучает новые для него понятия, обосновывает отдельные леммы и теоремы, закрепляет понимание соответствующего теоретического

материала при решении задач. При этом решённая и записанная (хотя бы на уровне основных выкладок) задача рассказывается педагогу, при этом в ходе диалога обсуждаются и устраняются недочёты в решении, отмечаются положительные и не очень удачные пути решения задачи, в целом разбираются связи между изученными математическими понятиями и возможности их приложения на практике. Наиболее важной особенностью такого подхода является то, что дети ориентированы не на пассивное усвоение материала, а именно на активную познавательную деятельность, самостоятельное открытие новых для себя способов решения задач и новых математических фактов.

Ниже будут описаны возможные особенности построения занятия с использованием листов, а также отмечены некоторые положительные и отрицательные стороны такого подхода.

### **Общие принципы формирования комплектов заданий**

Система листов является достаточно гибкой: на учебном занятии детского математического объединения может быть листок, состоящий только из задач (и тогда занятие превращается в чисто практическое), однако вполне возможно сформировать листок на основе определений и теорем из нового тематического раздела, а вместо задач предложить доказать обучающимся предложенные утверждения (в том числе можно разбить доказательство крупной теоремы на несколько этапов, предоставив школьникам возможность доказать их самостоятельно). В конце концов, вполне допустимо, даже если система листов взята за основу, чередовать такой подход с другими формами работы: например, проводить лекции, семинары (в том числе и с участием детей в роли докладчиков), обсуждения, индивидуальные или командные математические игры. Иначе говоря, как и с прочими формами работы, система листов применяется тогда, когда в ней есть педагогическая целесообразность.

С учетом особенностей целевой аудитории программы (как возрастных особенностей, так и возможного неоднородного уровня конкретной учебной группы в математическом объединении), а также основных целевых установок проводимого занятия, подбор комплекта заданий в листок требует учета большого количества факторов.

Примеры комплектов заданий (листов) представлены в Приложении

### **Количество заданий, разбиение на части**

Обучающиеся 13-14 лет в основной своей массе плохо умеют планировать свою деятельность даже на протяжении одного занятия. Поэтому включение в листок большого количества задач (например, более 10) приводит к тому, что дети распыляются, начинают браться за все задания подряд, решают задачи бессистемно, не могут продуктивно сосредоточиться на аккуратном продуманном решении задачи. В то же время малое количество заданий не позволяет гибко соответствовать возможностям как более слабых, менее обученных или предпочитающих работать в более медленном темпе

школьников, так и одновременно с ними более подготовленных обучающихся с более высоким стартовым уровнем, мотивацией или текущим уровнем. Возможные варианты решения этой проблемы:

- оптимизация количества заданий: подумайте, правда ли Вы хотите вставить в комплект такое количество задач на такое небольшое время; постарайтесь убрать задачи, которые не несут дополнительной смысловой нагрузки, дублируют уже использованные в других задачах идеи; оставьте 8-10 задач (при большом желании – 12);
- дробление листка на фрагменты: допустимо разбить листок с набором заданий на несколько «порций» по 3-6 заданий, при этом выдавать следующий листок только тем, кто достаточно хорошо продвинулся в выполнении заданий с предыдущего.

### **Планирование выполнения заданий**

В некоторых случаях оказывается полезным, чтобы обучающиеся выполняли задания листка в какой-то определённой последовательности. Например, это целесообразно при планомерном изучении какой-то новой темы, в которой математические факты и закономерности образуют упорядоченную последовательность. Также бывает полезным решение задач по мере возрастания сложности (если так они были упорядочены на листке).

Реализовать необходимую упорядоченность в выполнении заданий можно следующими способами:

- декларативно: в сопроводительном комментарии (устном или письменном) явно объявляется, что задания (доказательство теорем, решение задач) выполняются строго последовательно или в ином объявленном порядке; допускается также запрещать использовать при сдаче задания математический факт (теорему, лемму, результат одной из задач) до того, как этот факт будет доказан;
- разбиением листа: как было сказано выше, листок может быть разделён на несколько фрагментов, при этом необходимая упорядоченность в выполнении заданий частично реализуется неодновременностью выдачи фрагментов (в результате очередную часть листка школьник получает тогда, когда доказал все необходимые факты с предыдущего листка).

### **Индивидуализация листков**

В своей исходной форме описываемая система предполагает, что все обучающиеся на занятии изначально получают один и тот же набор заданий. Тем не менее, всегда существует возможность отойти от данной парадигмы и формировать на основе листков, разбитых на фрагменты (модули) индивидуальную образовательную траекторию. Таким образом, уже варианты первой части листка или полностью весь листок можно составить в расчёте на конкретный уровень обучающихся:

- для стартового уровня можно больший упор сделать на основных понятиях рассматриваемой темы, на иллюстрации вводимых понятий примерами, усилить задачами стартового уровня;
- для базового уровня первый листок уже может содержать задачи разного уровня на использование введённых понятий на практике, а также подготовить переход школьников к более сложным задачам и понятиям;
- для продвинутого уровня обучающихся первый листок может содержать задания, на примере которых школьники могут показать уверенное владение всем объёмом введённых понятий и математических утверждений, а также набор заданий с переходом к задачам повышенной сложности.

Следующие (после первого) фрагменты листков могут быть использованы для оперативной коррекции образовательного маршрута. Обучающимся, достаточно быстро освоившим все необходимые понятия и продемонстрировавшим способность их применить для решения сложных задач, можно предложить более сложные задания в дополнительном листке. В то же время тем, кто испытал достаточно серьёзные затруднения в самостоятельном изучении темы, допускается дать фрагмент листка на дальнейшее закрепление рассматриваемых понятий с большим упором на их иллюстрацию и применение в решении более простых типовых задач.

### **Организация приёма и обсуждения задач**

Общая организационная структура учебного занятия на основе системы листков была описана выше: в начале занятия, возможно после вводного доклада педагога, обучающиеся получают листок (по умолчанию один и тот же, хотя возможна их индивидуализация) с заданиями, который выполняют в течение всего отведённого времени. Выполнив очередное задание или несколько заданий, обучающийся информирует педагога о своём желании отвечать, после чего индивидуально и максимально изолированно от других обучающихся обсуждает с преподавателем свои продвижения в решении. Преподаватель указывает на имеющиеся в решениях недостатки, ошибки, возможные пути исправления, а ребенок отвечает на заданные вопросы, исправляет решения, корректирует планы дальнейшей работы.

Отметим, что при приёме задач следует не переусердствовать с зачётной функцией листка. Обсуждение задач не должно превращаться в экзамен (хотя определённые функции контроля в системе листков предусмотрены) и в идеале представляет собой беседу двух математиков (начинающего и более опытного, но построенную на принципах равенства, научности и аргументированности) – конструктивную, настроенную на продвижение вперёд и изучение нового, а не только на обсуждение ошибок.

### **Система листков как форма контроля**

Безусловно, уже наиболее очевидные результаты выполнения предложенных заданий («самостоятельно доказал теорему», «решил задачу»,

«придумал доказательство утверждения в одну сторону» и т.д.) являются значимыми показателями общей эффективности усвоения программного материала. Поэтому ведение текущего рейтинга является достаточно эффективным средством организации текущего контроля успеваемости.

В рамках системы листков наиболее традиционной является оценка в 1 балл за каждое выполненное задание (вне зависимости от его сложности). Однако балл ставится только в том случае, если задание выполнено полностью, все неточности устранены, ошибки исправлены и решение может считаться полностью изложенным. Тем не менее, количество подходов (попыток сдать задачу) на занятии обычно не регламентируется, а итоговый результат (1 балл за полностью решённую задачу и 0 балл за нерешённую или решённую не полностью) не зависит от количества подходов.

| 11 | 8 класс   |       |       |       | Комбинаторика (область, 17.01.17) |   |   |   |   |   |   |   |
|----|-----------|-------|-------|-------|-----------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | Фамилия   | Имя   | Сумма | класс | 1                                 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 13 | Фамилия1  | Имя1  | 54    | 8     | 1                                 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   | 6 |
| 14 | Фамилия2  | Имя2  | 19    | 8     | 1                                 | 1 |   |   |   |   |   | 2 |
| 15 | Фамилия3  | Имя3  | 27    | 8     | 1                                 | 1 |   |   |   |   |   | 2 |
| 16 | Фамилия4  | Имя4  | 61    | 8     | 1                                 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   | 6 |
| 17 | Фамилия5  | Имя5  | 65,5  | 8     |                                   |   |   |   |   |   |   | 0 |
| 18 | Фамилия6  | Имя6  | 40    | 8     |                                   |   |   |   |   |   |   | 0 |
| 19 |           |       |       |       |                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 | 9 класс   |       |       |       | Комбинаторика (область, 17.01.17) |   |   |   |   |   |   |   |
| 21 | Фамилия   | Имя   | Сумма | класс | 1                                 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 22 | Фамилия1  | Имя1  | 53    | 9     | 1                                 | 1 | 1 |   | 1 |   |   | 4 |
| 23 | Фамилия2  | Имя2  | 63    | 9     | 1                                 | 1 | 1 |   | 1 | 1 |   | 5 |
| 24 | Фамилия3  | Имя3  | 85    | 9     | 1                                 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   | 6 |
| 25 | Фамилия4  | Имя4  | 66    | 9     | 1                                 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   | 6 |
| 26 | Фамилия5  | Имя5  | 0     | 9     |                                   |   |   |   |   |   |   | 0 |
| 27 | Фамилия6  | Имя6  | 56    | 9     | 1                                 |   | 1 |   |   |   |   | 2 |
| 28 | Фамилия7  | Имя7  | 46    | 9     | 1                                 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   | 5 |
| 29 | Фамилия8  | Имя8  | 20    | 9     |                                   |   |   |   |   |   |   | 0 |
| 30 | Фамилия9  | Имя9  | 10    | 9     |                                   |   |   |   |   |   |   | 0 |
| 31 | Фамилия10 | Имя10 | 59    | 9     | 1                                 | 1 | 1 |   | 1 | 1 |   | 5 |
| 32 | Фамилия11 | Имя11 | 54    | 9     | 1                                 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 33 | Фамилия12 | Имя12 | 8     | 9     |                                   |   |   |   |   |   |   | 0 |

**Рис. 1 Текущий рейтинг и рейтинг отдельного занятия**

Таким образом, педагог ведёт рейтинг как отдельного занятия, так и общую рейтинговую таблицу на протяжении всего учебного года. Для удобства подсчёта актуального рейтинга учащихся удобнее всего вести в формате электронной таблицы – либо в книге Microsoft Excel или Open Office Calc, либо в сервисах типа Google.Таблицы. Последний вариант предпочтительнее в ситуации, когда в месте проведения занятий есть доступ к глобальной сети, а также в условиях, когда оперативный доступ к рейтинговой таблице нужно обеспечить нескольким пользователям (например, преподавателю и его ассистенту или преподавателю конкретного математического объединения и координатора математических объединений). Пример рейтинговой таблицы (как с текущим рейтингом-суммой, так и с результатами отдельного занятия) можно представлен на рисунке 1.

Безусловно, использование рейтинга как единственной формы контроля значительно снижает возможности педагога по оценке сформированности компетенций на различном уровне реализации образовательной программы. Поэтому для эффективной оценки текущего уровня обучающихся целесообразно использовать и другие подходы. Например, так как процедура работы по листкам сопряжена с устной сдачей и обсуждением выполненных заданий, то уже эта

беседа педагога (эксперта) со школьником является формой организации контроля образовательных достижений.

#### ***4.2. Педагогические технологии и методы обучения***

Для достижения поставленных дидактических целей и реализации познавательной и творческой активности обучающихся в образовательном процессе используются следующие педагогические технологии и методы обучения:

1. Математические соревнования: письменная личная математическая олимпиада; устная личная математическая олимпиада; устная командная математическая олимпиада. (Приложение 3);
2. Самостоятельная работа обучающихся с теоретическим материалом;
3. Взаимное обучение, самообучение.
4. Элементы научно-исследовательской деятельности.
5. Технология проблемного обучения.
6. Здоровьесберегающие технологии

Методический фонд по дополнительной общеразвивающей программе «Математика: удивительный мир логики и творчества» содержит: авторские методические рекомендации к программе по отдельным тематическим модулям, комплект учебно-методической литературы для каждого года обучения, нормативные, финансовые и инструктивные документы, регламентирующие деятельность математических объединений и обеспечивающие их функционирование.

## **5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

### **5.1. Нормативные документы**

1. Федеральный Закон от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» с изменениями.
2. Федеральный закон от 31.07.2020 г. № 304-ФЗ о внесении изменений в Федеральный закон Российской Федерации «Об образовании в Российской Федерации по вопросам воспитания обучающихся».
3. Приказ Министерства труда и социальной защиты РФ № 652н от 22 сентября 2021 г. «Об утверждении профессионального стандарта "Педагог дополнительного образования детей и взрослых».
4. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 23.08.2017 г. № 816 (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации от 18.09.2017 г., регистрационный № 48226) «Порядок применения организациями, осуществляющими образовательную деятельность, электронного обучения, дистанционных образовательных технологий при реализации образовательных программ».
5. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28.09.2020 № 28 «Об утверждении СП 2.4.3648 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи».
6. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28.01.2021 N 2 «Об утверждении санитарных правил и норм СанПиН 1.2.3685-21 «Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания».
7. Постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 02 ноября 2021 г. № 27 «О внесении изменения в пункт 3 постановления Главного государственного санитарного врача РФ от 30.06.2020 № 16 «Об утверждении санитарно-эпидемиологических правил СП 3.1/2.4.3598-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации работы образовательных организаций и других объектов социальной инфраструктуры для детей и молодежи в условиях распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-19)».
8. Постановлением Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 21.03.2022 г. № 9 «О внесении изменений в санитарно-эпидемиологические правила СП 3.1/2.4.3598-20 "Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации работы образовательных организаций и других объектов социальной инфраструктуры для детей и молодежи в условиях распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-2019)", утвержденные постановлением Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 30.06.2020 № 16»;
9. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 27.07.2022 № 629 «Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам»;
10. Распоряжение Правительства РФ от 31 марта 2022 г. № 678-р «Концепция развития дополнительного образования детей до 2030 года».

### **5.2. Учебно-методическая литература**

1. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – М.: МЦНМО, 2012
2. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. – М.: Физматгиз, 1961.
3. Верещагин Н. К., Шень А.Х. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.
4. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – М.: МЦНМО, 2005.

5. Генкин С.А., Интенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.
6. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972.
7. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник — М.: МЦНМО, 2002.
8. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 1997.
9. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. - М.: МЦНМО, 2011
10. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С. Новые встречи с геометрией. — М., Наука, 1978
11. Левин А.Ю. Что такое комбинаторика. – М.: «Квант», 1999 г., № 5, 6
12. Муштари Д.Х. Подготовка к математическим олимпиадам. – Казань, 1990.
13. Толпыго А.К. Инварианты. – «Квант», 1976, №12.
14. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. — М., Наука, 1982
15. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия. — М., Наука, 1984
16. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. – М, 1992.
17. Шень А.Х. Игры и стратегии с точки зрения математики – М.: МЦНМО, 2007.
18. Шень А.Х. Простые и составные числа – М.: МЦНМО, 2005.
19. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М., Наука, 1970
20. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М., Наука, 1974
21. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М., Наука, 1976
22. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия). — М., ГТТИ, 1952
23. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). — М., ГТТИ, 1954
24. Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников: Кн. для учащихся. — М.: Просвещение, 1992.

### **5.3. Сборники задач**

1. Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терёшин Д. А. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993—2006. — М.: МЦНМО, 2007.
2. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет – М.: МЦНМО, 2007.
3. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М., Наука, 1975.
4. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.
5. Бугаенко В.О. Турниры им. Ломоносова. – М.: МЦНМО, 1998.
6. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1. – М.: Бюро Квантум, 2010.
7. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. - М.: Просвещение, 1986.
8. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
9. Зарубежные математические олимпиады (под ред. Сергеева И.Н.) — М., Наука, 1987
10. Избранные задачи. Сборник. Пер. с англ. Ю. А. Данилова. - М., Мир, 1977.
11. Кюршак Й, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани Венгерские математические олимпиады. - М., «Мир», 1976.
12. Математические турниры им. А.П. Савина. Составитель А.В. Спивак. – М.: Бюро Квантум, 2006
13. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии (5-е изд. испр. и доп.). - М.: МЦНМО, 2006.
14. Страшевич С, Бровкин Е. Польские математические олимпиады. - М., Мир, 1978.

**Учебно-тематический план первого года обучения**  
**ДОДОП «Избранные главы математики»,**  
**реализуемой в образовательном объединении г.о.г. Рыбинска (группа РВГ)**

| <b>№ п/п</b> | <b>Название раздела</b>             | <b>Всего</b> | <b>Лекции</b> | <b>Прак-тика</b> | <b>Формы контроля</b>                                     |
|--------------|-------------------------------------|--------------|---------------|------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1.           | Методы решения математических задач | 4            | 0,5           | 3,5              | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 2.           | Алгебра и теория чисел              | 7            | 2             | 5                | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 3.           | Комбинаторика и теория графов       | 2            | 0,5           | 1,5              | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 4.           | Многочлены                          | 3            | 1             | 2                | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа    |
| 5.           | Теоремы и задачи геометрии          | 2            | -             | 2                | Фронтальный и индивидуальный опрос                        |
| 6.           | Алгебраические неравенства          | 4            | -             | 4                | Фронтальный опрос, обсуждение                             |
| 7.           | Алгебра и теория чисел              | 7            | 3             | 4                | Фронтальный опрос, математическое соревнование            |
| 8.           | Математические соревнования:        | 2            | 0             | 2                | Математическое соревнование                               |
| 9.           | Комбинаторная геометрия             | 3            | -             | 3                | Индивидуальный опрос                                      |
| 10.          | Итоговое занятие                    | 2            | -             | 2                |                                                           |
|              | <b>ИТОГО</b>                        | <b>36</b>    | <b>7</b>      | <b>29</b>        |                                                           |

**Календарный учебный график**  
к ДОДОП «Избранные главы математики»,  
реализуемой в образовательном объединении г.о.г. Рыбинска  
(группа РВГ, первый год обучения)

Педагог дополнительного образования **Богомолов Ю.В.**

| Дата | Тема                                                                               | Всего часов | В том числе |          |
|------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------|----------|
|      |                                                                                    |             | Теория      | Практика |
|      | Общие принципы решения математических задач: примеры и контрпримеры                | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Общие принципы решения математических задач: метод математической индукции         | 1           |             | 1        |
|      | Общие принципы решения математических задач: подсчет двумя способами               | 1           |             | 1        |
|      | Общие принципы решения математических задач: принцип крайнего                      | 1           |             | 1        |
|      | Комбинаторика и теория графов: задачи с ограничениями                              | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Комбинаторика и теория графов: пути и связность                                    | 1           |             | 1        |
|      | Алгебра и теория чисел: арифметические функции                                     | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Алгебра и теория чисел: НОД и НОК, алгоритм Евклида                                | 1           |             | 1        |
|      | Алгебра и теория чисел: китайская теорема об остатках                              | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Алгебра и теория чисел: диофантовы уравнения                                       | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Избранные задачи и теоремы геометрии                                               | 1           |             | 1        |
|      | Избранные задачи и теоремы геометрии                                               | 1           |             | 1        |
|      | Комбинаторная геометрия: системы точек и прямых                                    | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Комбинаторная геометрия: наибольшее и наименьшее расстояние                        | 1           |             | 1        |
|      | Алгебраические неравенства: усиление                                               | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Математические соревнования                                                        | 1           |             | 1        |
|      | Комбинаторные методы в теории чисел: основная теорема арифметики                   | 1           |             | 1        |
|      | Комбинаторные методы в теории чисел: формула включений-исключений                  | 1           |             | 1        |
|      | Математические соревнования: личная математическая олимпиада                       | 1           |             | 1        |
|      | Многочлены: свойства корней                                                        | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Многочлены: теория Виста и ее применение в решении систем алгебраических уравнений | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Целочисленные и целозначные многочлены                                             | 1           |             | 1        |
|      | Теория чисел: разноразрядности и делимости                                         | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Теория чисел и принцип крайнего                                                    | 1           | 0,5         | 0,5      |
|      | Индукция в теории чисел                                                            | 1           |             | 1        |
|      | Индукция в комбинаторике                                                           | 1           |             | 1        |

|              |                                                 |           |          |           |
|--------------|-------------------------------------------------|-----------|----------|-----------|
|              | Принцип крайнего в комбинаторике                | 1         |          | 1         |
|              | Геометрические методы в алгебре                 | 1         | 0,5      | 0,5       |
|              | Нестандартное введение координат                | 1         | 0,5      | 0,5       |
|              | Свойства средних значений                       | 1         | 0,5      | 0,5       |
|              | Суммирование и усреднение в комбинаторике       | 1         |          | 1         |
|              | Арифметические функции: количество и сумма цифр | 1         |          | 1         |
|              | Методы суммирования: телескопические суммы      | 1         |          | 1         |
|              | Методы суммирования: конечные разности          | 1         |          | 1         |
|              | Итоговая аттестация                             | 1         |          | 1         |
|              | Итоговое занятие                                |           |          | 1         |
| <b>ИТОГО</b> |                                                 | <b>36</b> | <b>7</b> | <b>29</b> |

## ***Математические соревнования***

Существует достаточно много различных форм внеурочной математической деятельности. Широкое распространение получили математические олимпиады различных уровней, проводимые с целью привлечения способных школьников к занятию математикой. Также достаточно популярными являются такие виды состязаний как математические аукционы, брейн-ринги, викторины, математические регаты и «математические драки».

Как правило, математические соревнования включают в себя индивидуальную или групповую работу над решением интересных нестандартных задач, письменное или устное изложение решения, прямое взаимодействие с другими участниками или членами жюри. Ряд математических соревнований формируют умения поиска ошибок и недочетов в предложенном решении (например, оппонирование на математическом бое), оценку трудности задач (с целью выбора правильной игровой стратегии на математическом аукционе или математическом бое), анализ своих сильных и слабых сторон (например, в ходе математической регаты), отрабатывают навыки письменной и устной монологической речи, а также формируют важные черты математической культуры и прививают навыки ведения научной дискуссии.

Ниже приводятся правила наиболее распространенных личных и командных математических соревнований.

### **Письменная личная математическая олимпиада**

Каждый участник получает комплект задач (как правило, от 4 до 6), которые решает в течение отведенного времени (3-4 часа; младшим школьникам рекомендуется отводить на решение задач 1,5-2 часа). Решения задач оформляются письменно и предоставляются на проверку членам жюри.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. В ходе проверки по каждой задаче соответственно выставляется от 0 до 7 баллов. Допускается и проведение олимпиады, в которой стоимость задач может отличаться. Общий итог подводится суммированием баллов.

### **Непрерывный конкурс решения задач**

Конкурс отличается тем, что предполагает решение большого количества разноплановых задач в течение длительного промежутка времени (от нескольких дней до нескольких месяцев). Он сочетает в себе самостоятельную работу над сложными задачами (проблемами) в свободном режиме в течение длительного промежутка времени, допускает работу с литературой, требует четкого последовательного изложения результатов. Все это позволяет считать его адекватной имитацией научной деятельности.

Ниже приводится одна из схем непрерывного конкурса.

В непрерывном конкурсе решения задач школьники могут принимать участие как индивидуально, так и объединившись в команды (не более 4 человек). Участники конкурса получают задачи от жюри, решения сдают в письменной форме. Жюри после проверки каждого из решений засчитывает или не засчитывает задачу участнику. Общий итог подводится в конце учебного года, ежемесячно подводятся промежуточные итоги. Индивидуальный участник не может входить в состав ни одной из команд. Решения сдаются участниками письменно одним из оговоренных способов. Начать и прекратить участие в конкурсе допускается в любой момент времени. Считается, что школьник (команда) принимает участие в конкурсе, если у него засчитана хотя бы одна задача.

Задачи выдаются письменно (как правило, комплектами по 10-30 задач). Текущий комплект задач общий для всех участников конкурса. Комплект заданий может пополняться по ходу турнира.

Жюри готовит комплекты заданий, определяет время и место выдачи заданий, способы предоставления решений, консультирует участников по условиям задач, выполняет проверку работ участников, подводит итоги.

После проверки решения, задача либо засчитывается данному участнику (если участником предоставлено полное решение), либо не засчитывается (если полного решения не предоставлено). Количество попыток предоставления решения задачи не ограничивается. Итоги проверки доводятся до сведения участника в течение месяца.

Текущая стоимость задачи равна количеству участников конкурса, у которых в текущий момент времени данная задача не засчитана (то есть, общее количество участников конкурса минус количество сдавших полное решение задачи). Текущий результат (количество баллов) каждого участника определяется как сумма текущих стоимостей каждой из засчитанных ему задач.

Промежуточные итоги подводятся ежемесячно (в начале месяца), общий итог конкурса подводится в конце учебного года. При подведении итогов публикуются только текущие результаты участников конкурса (отдельно в индивидуальном и командном зачете, допускается подведение итогов в общем зачете), номера зачтенных участнику задач не разглашаются.

Решение о снятии задачи с конкурса, изменении формулировки задачи, дисквалификации участника и других не предусмотренных правилами ситуаций принимается жюри конкурса.

### **Устная личная математическая олимпиада**

Участникам предлагается комплект задач. Все задачи делятся на две группы «выводные» и «довыводные». Участник олимпиады, решивший 3 задачи из первой группы (на их решение отводится 2,5 часа), получает вторую группу задач и еще 1 час дополнительного времени.

Решив задачу (или несколько задач), школьник вызывается отвечать и рассказывает решение одному из членов жюри. Тот ищет ошибки и, если какие-то места в решении требуют более подробного объяснения, задает соответствующие вопросы. Отвечающий может исправлять и дополнять решение "на ходу", но если он не может сделать этого достаточно быстро (например, думает больше минуты), то засчитывается неверный подход. Всего участник может сделать не больше трех подходов по каждой задаче. Если он не смог рассказать решение за три попытки, то он лишается права отвечать эту задачу. При подведении итогов количество неверных подходов не учитывается.

Если принимающий считал решение правильным, то, оно засчитывается, и школьник возвращается на место решать другие задачи. Так же каждое решение оценивается баллами (по каждой задаче от 1-го до 7-ми). Если школьник получил неполный балл по данной задаче (такое возможно, даже если решение признано верным) и у него остались подходы, он может исправить допущенные огрехи. "Подозрительные" решения перепроверяются жюри, и бывает (впрочем, не часто), что обнаруживается хитрая ошибка, не найденная во время ответа. Если олимпиада еще не закончилась, то школьнику сообщают об ошибке и предлагают исправить или дополнить решение, а запись о его ответе аннулируется. После конца олимпиады изменения в протоколе уже невозможны, даже если выяснилось, что кто-то рассказал неверное решение.

Допускается использовать следующую систему оценки: решенная задача – 1 балл, нерешенная задача – 0 баллов, при этом номер подхода не учитывается. Также допускается варьировать количество довыводных и выводных задач и количество времени, отводимого на их решение.

При подведении итогов все баллы суммируются.

### **Устная командная математическая олимпиада**

На каждую из команд выдается одинаковый комплект задач, которые она решает в течение отведенного промежутка времени (как правило, 3-4 часа).

Решение задачи представляется устно одним из членов команды, причем только одной судейской бригаде. При этом команде желательно иметь с собой необходимые для рассказа решения чертежи и выкладки. На изложение решения каждой задачи дается три попытки. Если все они использованы, а решение задачи не засчитано, то команда не может подходить с решением этой задачи. Каждый член команды может подходить с решениями не более чем двух различных задач. Если решение задачи предоставляется сначала одним игроком, а затем другим, то выходы засчитываются как одному игроку, так и другому. Победитель определяется по количеству решенных задач. В случае равенства количества решенных задач могут учитываться количество подходов и сложность решенных задач.

### **Математическая карусель**

Математическая карусель – это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах – исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляет судье игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинает решаться тогда, когда этот участник там появляется.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

- а) кончилось время, или
- б) кончились задачи на зачетном рубеже, или
- в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

## Математическая абака

Математическая абака (математический квадрат) – это командная игра-соревнование по решению задач. Все задачи выдаются для решения всем командам одновременно. Основным зачётным показателем в математической абаке является общее количество набранных очков (включая бонусы). В случае равенства очков у нескольких команд более высокое место занимает команда, имеющая большую сумму бонусов. При равенстве и этого показателя команды считаются разделившимися места.

Решение задач. Каждой команде предлагается для решения 6 тем по 6 задач в каждой теме. Задачи каждой темы сдаются по порядку, от 1-й до 6-й (например, у команды не примут ответ на 4-ю задачу, пока она не сдала ответы на задачи 1, 2 и 3). На каждую задачу отводится один подход (одна попытка сдать ответ). Если команда предъявила правильный ответ на задачу, она получает за это цену задачи, а если неправильный или неполный – 0 очков. В некоторых задачах по усмотрению жюри цена задачи может быть поделена поровну между всеми возможными ответами, в этом случае каждый найденный ответ приносит команде соответствующую часть цены. Для каждой такой задачи это указывается в ее условии.

Цена первой задачи каждой темы – 10 очков, второй – 20, ..., шестой – 60 очков. (Таким образом, не считая бонусов, команда может заработать за решение задач до  $6 \cdot 210 = 1260$  очков.)

Основные бонусы. Каждая команда дополнительно может заработать бонусные очки:

- За правильное решение всех задач одной темы («бонус-горизонталь») – 50 очков
- За правильное решение задач с одним и тем же номером во всех темах («бонус-вертикаль») – цену задачи с этим номером

Бонусы за первое решение. Первые команды, получившие каждый из шести возможных бонус-горизонталей и каждый из шести бонус-вертикалей, получают их в двойном размере.

Окончание игры. На решение задач отводится 90 минут. Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время, отведенное для игры.

## Математическая регата

В регате участвует некоторое количество команд. В составе каждой команды — 4 человека. Соревнование проводится в четыре тура. Каждый тур представляет собой коллективное письменное решение трех задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном одинарном листе, причем каждая команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач.

Проведением регаты руководит Координатор. Он организует раздачу заданий и сбор листов с решениями; проводит разбор решений задач и обеспечивает своевременное появление информации об итогах проверки.

Время, отведенное командам для решения, и стоимость задач каждого тура в баллах указаны на листах с условиями задач, которые каждая команда получает непосредственно перед началом каждого тура.

Параллельно с ходом проверки, Координатор осуществляет для учащихся разбор решений задач, после чего школьники получают информацию об итогах проверки. После объявления итогов тура, команды, не согласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляции

Команды-победители и призеры регаты определяются по сумме баллов, набранных каждой командой во всех турах.