

Министерство образования Ярославской области
Государственное образовательное учреждение
дополнительного образования Ярославской области
«Региональный образовательный центр «Новая школа»

Принята на заседании
Педагогического совета
ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа»
от «16» июня 2026 года
Протокол № 02

Утверждаю
Директор
ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа»
И.С. Леонова

Леонова
Ирина
Станиславовна

Подписано цифровой
подписью: Леонова
Ирина Станиславовна
Дата: 2026.06.17 15:11:52
+03'00'

Дополнительная общеразвивающая программа
естественно-научной направленности

«Нестандартные математические задачи и стратегии их решения»

Возраст обучающихся: 13 – 15 лет (7-9 класс)

Срок реализации программы: 3 года

Автор – составитель программы:
Каленова Анастасия Андреевна,
педагог дополнительного образования
ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа»

г. Ярославль, 2026

Раздел №1 Комплекс основных характеристик программы

1. Пояснительная записка дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи и стратегии их решения»

1.1. Актуальность и значимость программы

Математика — это язык, на котором говорят не только наука и техника, математика – это язык человеческой цивилизации. Она практически проникла во все сферы человеческой жизни. Современное производство, компьютеризация общества, внедрение современных информационных технологий требует математической грамотности. Это предполагает и конкретные математические знания, и определенный стиль мышления, вырабатываемый математикой.

Дополнительная общеразвивающая программа «Нестандартные задачи по математике и стратегии их решения» направлена на расширение математического кругозора, развитие у обучающихся познавательного интереса к предмету, творческих способностей при решении нестандартных задач по математике, а также на умение создавать математические модели практических задач.

Актуальность дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи и стратегии их решения» определяется нормативно-правовым документом федерального уровня - «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам» (Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 27 июля 2022 г. N 629) направлен на «удовлетворение индивидуальных потребностей обучающихся в интеллектуальном развитии» а также на «формирование и развитие творческих способностей учащихся, выявление, развитие и поддержку талантливых учащихся».

Наряду с этим, актуальность настоящей программы обусловлена социальным запросом со стороны детей и родителей на дополнительное математическое образование обучающихся среднего школьного возраста общеобразовательных учреждений г. Ярославля и Ярославской области, у которых отсутствует возможность обучаться на очных занятиях в образовательных объединениях ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа».

1.2. Основные идеи, подходы, принципы

Дополнительная общеразвивающая программа «Нестандартные математические задачи и стратегии их решения» является модифицированной, разработана на основе дополнительной общеразвивающей программы «Методы решения олимпиадных задач по математике», (автор - Богомолов Юрий Викторович, доцент кафедры дискретного анализа ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова, к.ф.-м.н.) и дополнительной общеразвивающей программы «Занимательная математика» (автор - Волченков Сергей Геннадьевич, доцент

кафедры вычислительных и программных систем ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова, к.т.н.).

Отличительной особенностью настоящей программы от ранее существующих является ориентированность содержания на интересующихся математикой обучающихся, ранее не занимавшихся в математических объединениях. В связи с этим разделы программы логически выстроены таким образом, что содержание включает темы 1-2 года обучения из выше названных программ: принцип Дирихле, задачи типа «оценка + пример», задачи на доказательства от противного и др., знание которых необходимо для успешного решения нестандартных задач, а также дополнено разделами: теория графов, математическая логика, комбинаторика, оптимизация, инварианты, текстовые задачи и др., которые не изучаются в рамках школьной программы. Изучение данных разделов дает возможность обучающимся подготовиться к выступлениям на олимпиадах и математических соревнованиях различного уровня. В то же время содержание дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи и стратегии их решения» в некоторых разделах дополняет основную общеобразовательную программу по математике и предоставляет обучающимся возможность углубить свои знания в теории чисел и геометрии, научиться решать задачи повышенной сложности и применять нестандартные подходы на практике, отказываясь от шаблонного мышления и работы по заранее известному алгоритму. Наряду с этим внесены изменения в практическую часть: комплекты задач подобраны по уровню сложности по каждой теме и разделам программы.

Новизна — содержание программы преимущественно ориентировано на работу с нестандартными задачами, набор заданий систематически обновляется и дополняется задачами новых математических олимпиад. В то же время принцип подбора задач не выходит за рамки школьных знаний по приемам поиска решений, но способствует формированию исследовательских навыков. Новизна программы также находит свое отражение и в методике проведения занятий, отличающейся от традиционной методики школьного образования. Учебные занятия по данной программе решают целый комплекс задач по углубленному математическому образованию, развитию индивидуальных способностей ребенка, максимальному удовлетворению их интересов и потребностей.

Основное преимущество программы — проведение занятий в дистанционном формате. Такая форма обучения дает возможность обучающимся Ярославской области повысить уровень математических знаний, умений и навыков, познакомиться с нестандартными математическими задачами и идеями. В связи с этим данная программа в первую очередь обеспечивает доступность дополнительного математического образования.

Программа предоставляет обучающимся возможность неординарно мыслить, позволяет им ознакомиться со многими интересными вопросами математики, выходящими за рамки школьной программы, расширить целостное представление о проблеме данной науки.

Поэтому в качестве одного из основополагающих принципов, положенных в основу программы, на первый план выдвинута идея приоритета развивающей функции обучения математике, через систему дополнительного образования.

Ведущие принципы программы:

- принцип научности (знания, которые сообщает преподаватель и которыми овладевают учащиеся на любой ступени обучения должны быть научными, основными на проверенных наукой и практикой положения),
- принцип систематичности и последовательности (учащиеся должны овладевать научными умениями и навыками в строго определенном порядке. Последовательность предполагает логическую обоснованность изучения последующих разделов за предыдущими),
- принципы сознательности и активности (сознательность обучения предполагает понимание учащимися смысла, усваиваемых знаний, умений и навыков, отчетливое представление ими целей и значений учебной деятельности. Активность проявляется в инициативности и высокой степени самостоятельности учащихся),
- принцип наглядности (этот принцип исходит из единства чувственного и логического. Наглядность обеспечивает связь между конкретным и абстрактным, помогает достижению прочности знаний, осуществлению связи теории с практикой, доступность обучения и т.д.),
- принцип связи обучения с жизнью (он предполагает показ практического и общественного значения изучаемого материала).

1.3. Целевая аудитория программы

Программа адресована обучающимся 13 – 15 лет (7 – 9 классов) общеобразовательных учреждений Ярославской области.

Реализация программы предполагает наличие у детей хорошего уровня математической подготовки в объеме программы общеобразовательной школы для соответствующего возраста обучающихся, а также умения логически рассуждать.

1.4. Срок, объем и форма освоения программы

Дополнительная общеразвивающая программа «Нестандартные математические задачи и стратегии их решения» реализуется в течение 3 лет.

Общий учебно-тематический объем программы составляет 216 часов, из них:

Год обучения	Количество часов	Из них	
		Лекционные	Практические
Первый	72	24	48
Второй	72	26	46
Третий	72	34	38
Всего:	216	70	146

1.5. Режим занятий, периодичность и продолжительность

Учебная нагрузка определяется с учетом возраста детей, года обучения. В соответствии с гигиеническими правилами и требованиями устанавливается периодичность занятий и общее количество часов в неделю и за год.

Количество часов в неделю: 72 часа;

Периодичность занятий: 1 раз в неделю;

С учетом Методических рекомендаций по реализации образовательных программ начального, общего, основного общего, среднего общего образования, образовательных программ среднего профессионального образования и дополнительных общеобразовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (письмо «О направлении методических рекомендаций» Министерства просвещения Российской Федерации от 19.03.2020 г. № ГД-39/04) устанавливается продолжительность занятий (в академических часах).

Занятия проводятся 1 раз в неделю по 2 академических часа (по 30 минут) и обязательным 10 минутным перерывом между занятиями.

1.6. Особенности организации образовательного процесса

Учебные занятия проводятся по группам.

Формирование групп проводится по возрасту (классу) с учетом предполагаемого уровня освоения дополнительных общеобразовательных – дополнительных общеразвивающих программ естественно-научной направленности, реализуемых в образовательных объединениях ГОУ ДО ЯО РОЦ «Новая школа» и других образовательных организациях Ярославской области, а также принимается во внимание опыт и результативность участия в математических соревнованиях. Это позволяет педагогам учитывать в работе как возрастные особенности развития математических представлений у обучающихся, так и содержательную базу, сформированную к этому времени в курсе математики общеобразовательной школы.

Количественный состав групп: 10-15 человек.

Состав группы обучающихся – постоянный.

Содержание программы реализуется в дистанционном формате с использованием специального программного обеспечения:

- Webinar (или VK - видео звонки) – для онлайн-занятий, проведения консультаций;
- Сообщество в VK — в качестве системы управления курсом (электронный класс), где педагог размещает дополнительно файлы, содержащие материалы занятий, презентации, тематические тесты, гиперссылки на образовательные источники в сети Интернет (сайты, порталы, файлы) и др. образовательные ресурсы, также данная среда является инструментом для проведения контрольных работ, тестирования и их оценивания.

Учебные занятия включают в себя теоретическую и практическую части, которые могут чередоваться между собой. Теоретическая часть занятия состоит из онлайн-занятий, которые представлены в форме обсуждений заданной темы,

где педагог задает направление, а обучающиеся являются не пассивными слушателями, а активными участниками процесса. Такой подход дает возможность совместной работе педагога с обучающимися, помогает развивать у школьников навык самостоятельного поиска ответа, вывода формул и формирование понятийного аппарата.

Практическая часть занятия состоит из индивидуальных решений задач по теме с последующим их обсуждением и консультацией на онлайн-занятии.

Проверочные или контрольные работы решаются обучающимися самостоятельно в течение недели. Получение заданий, отправка решений и ознакомление с результатами осуществляется с помощью личного кабинета в электронном классе.

На первом году обучения закладываются основы для дальнейшего изучения олимпиадной математики, обучающиеся знакомятся с основными методами и идеями решения нестандартных задач, учатся доказывать и опровергать суждения не примерами, а в общем, теоретически.

На втором году обучения дети продолжают расширять круг знаний в ранее изученных разделах математики, также знакомятся с новыми разделами и элементами математики. Восьмиклассники впервые получают возможность почувствовать всероссийский уровень, участвуя в региональном и заключительном этапах олимпиады им. Леонарда Эйлера. Соответственно, сложность предлагаемых задач существенно возрастает.

Третий год обучения — важнейший этап в жизни олимпиадников. На смену «игровым» форматам математических соревнований и устных олимпиад регионального уровня приходят «взрослые» олимпиады. Девятиклассники впервые получают возможность участия в региональном этапе Всероссийской олимпиаде школьников. Соответственно, сложность предлагаемых задач существенно возрастает.

2. Цель и задачи программы

Цель: Развитие у обучающихся устойчивого познавательного интереса к углубленному изучению математики в процессе решения нестандартных математических задач.

Задачи:

Личностные:

- формировать у обучающихся устойчивый интерес к математике, представление о математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для общественного прогресса;
- развивать у обучающихся способность глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- способствовать проявлению любознательности, сообразительности при выполнении разнообразных заданий;
- развивать навыки работы в команде, проявлять лидерские качества.

Метапредметные:

- развивать способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные:

- способствовать овладению конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности;
- способствовать овладению специальной математической терминологией, совершенствовать математическую речь;
- развивать нестандартное мышление и творческий подход к поиску решения задач;
- развивать навыки решения нестандартных задач и задач повышенной сложности;
- развивать умение переводить различные задачи на язык математики.

3. Содержание программы

3.1. Учебно-тематический план

3.1.1. Учебно-тематический план первого года обучения

№ п/п	Название модуля	Всего	Теория	Практика	Формы контроля
1	Вводное занятие. Входной контроль. Общие принципы решения математических задач: Логический вывод, предположения, метод от противного; Задачи с неопределенным ответом (задачи «можно ли...»), необходимость и достаточность примеров и контрпримеров; Обратный ход или анализ с конца	6	2	4	(решение задач)
2	Введение в оптимизационные задачи: Построение точных оценок в задачах; Задачи типа «оценка + пример»	6	2	4	Офлайн-олимпиада
3	Математическая логика: Логика высказываний; Таблицы истинности; Логические задачи: Задачи о турнирах и методы их решений; Задачи про «Рыцарей и лжецов»; Задачи про «Мудрецов»; Принцип исключенного третьего; Принцип включения-исключения	8	2	6	Практическая работа
4	Принцип Дирихле: Основные понятия; Принцип Дирихле в задачах	6	2	4	Офлайн-олимпиада
5	Теория чисел: Позиционные и непозиционные системы счисления; Десятичная система счисления и признаки делимости; Последняя цифра в числе; Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 и др.; Основная теорема Арифметики; Алгоритм Евклида; Арифметика остатков; Сравнения по модулю; Малая теорема Ферма	12	4	8	Офлайн-олимпиада

№ п/п	Название модуля	Всего	Теория	Практика	Формы контроля
6	Инвариант: Понятие инварианта; Инварианты, связанные с четностью; Инварианты, связанные с делимостью и остатками; Инварианты, связанные с раскраской	6	2	4	Онлайн-обсуждение, онлайн-практикум
7	Комбинаторика: Подмножества элементов; Сочетания, размещения, перестановки с повторениями и без повторений; Треугольник Паскаля; Бином Ньютона; Свойства биномиальных коэффициентов	10	4	6	Офлайн-олимпиада
8	Теория графов: Виды графов. Изоморфизм графов; Пути и циклы, Эйлеровы обходы; Связность графов, степени вершин; Деревья, их свойства; Планарные и плоские графы; Теорема Эйлера; Ориентированные графы	6	2	4	
9	Геометрия: Геометрические неравенства; Движения. Углы и площади; Клетчатая геометрия, формула Пика; Решение геометрических задач	10	4	6	Офлайн-олимпиада
10	Итоговая проверочная работа Итоговое занятие	2	-	2	Проверочная работа
	Итого:	72	24	48	

3.1.2. Учебно-тематический план второго года обучения

№ п/п	Название модуля	Всего	Теория	Практика	Формы проведения
1	Вводное занятие. Входной контроль. Математическая логика: Принцип включения-исключения; Принцип исключенного третьего; Логические задачи; Задачи про турниры и игры	6	2	4	Онлайн-обсуждение, онлайн-практикум

№ п/п	Название модуля	Всего	Теория	Практика	Формы проведения
2	Принцип математической индукции: Полная индукция; Примеры индуктивных рассуждений; Математическая индукция в задачах на делимость; Математическая индукция в доказательстве формул	8	2	6	Офлайн-олимпиада
3	Теория чисел: Признаки делимости на 2^n , 5^n и др.; Диофантовы уравнения, уравнения в простых числах; Функция Эйлера, обобщенная малая теорема Ферма (теорема Эйлера); Теорема Вильсона; Квадратичные вычеты	8	4	4	
4	Инвариант: Инварианты и полуинварианты; Инварианты и полуинварианты, связанные с четностью, делимостью и остатками; Инварианты и полуинварианты, связанные с раскраской; Инварианты в теории графов; Инварианты в геометрии и комбинаторной геометрии; Сложные инварианты и полуинварианты	8	2	6	Офлайн-олимпиада
5	Оптимизация: Оценки и примеры; Принцип крайнего	4	2	2	
6	Текстовые задачи: Задачи на проценты; Задачи на части; Задачи на смеси и сплавы; Задачи на движение; Задачи на работу; Задачи с неравенствами; Иные текстовые задачи	8	2	6	Офлайн-олимпиада

№ п/п	Название модуля	Всего	Теория	Практика	Формы проведения
7	Нестандартные уравнения и неравенства: Уравнения, содержащие антье-функцию; Средние величины, неравенства о средних, классические неравенства, неравенство Коши; Доказательство неравенств; Метод Штурма в доказательстве неравенств	8	4	4	Онлайн-обсуждение, онлайн-практикум
8	Квадратный трехчлен: Квадратный трехчлен и его коэффициенты; Выделение полного квадрата; Корни квадратного трехчлена; Разложение на множители; Теорема Виета; Расположение корней квадратного трехчлена	10	4	6	Офлайн-олимпиада
9	Геометрия: Метод ГМТ; Равенство и подобие треугольников; Симметрия; Движения и гомотетия; Многоугольники; Окружности, вписанные углы, вписанные и описанные многоугольники	8	4	4	Офлайн-олимпиада
10	Итоговая проверочная работа Итоговое занятие	2	-	2	Контрольная работа
	Итого:	72	26	46	

3.1.3. Учебно-тематический план третьего года обучения

№ п/п	Название модуля	Всего	Теория	Практика	Формы контроля
1	Вводное занятие. Входной контроль.	2	1	1	(решение задач)
2	Геометрия: Треугольник Окружность Геометрические преобразования Построения и геометрические места точек	14	7	7	Практическая работа

№ п/п	Название модуля	Всего	Теория	Практика	Формы контроля
3	Математические доказательства: Прямое доказательство Метод математической индукции Противопоставление Доказательство от противного Примеры и контрпримеры Инварианты и полуинварианты Вспомогательная раскраска Принцип Дирихле Принцип крайнего	12	6	6	Практическая работа
4	Многочлены: Теорема Безу Многочлены с целыми коэффициентами Свойства коэффициентов многочлена Корни многочлена	8	4	4	Практическая работа
5	Метод «оценка + пример» в различных задачах	8	4	4	Практическая работа
6	Игры, турниры и логические задачи: Математические игры Турниры и таблицы Рыцари и лжецы Логические рассуждения в задачах	8	4	4	Практическая работа
7	Комбинаторика: Классическая комбинаторика Теория графов	4	2	2	Практическая работа
9	Текстовые задачи: Задачи на проценты и части Задачи на движение Задачи на работу Задачи на смеси и сплавы Другие задачи на построение уравнений и неравенств	6	2	4	Проверочная работа
10	Тождества, равенства и неравенства	4	2	2	Проверочная работа
11	Уравнения и системы уравнений	4	2	2	Проверочная работа
12	Итоговая проверочная работа Итоговое занятие	2	-	2	Проверочная работа
	Итого:	72	34	38	

3.2. Содержание учебного плана

3.2.1. Содержание учебного плана первого года обучения

РАЗДЕЛ 1. Вводное занятие. Входной контроль. Общие принципы решения математических задач (6 ч.)

Теория:

- Логический вывод, предположения, метод от противного
- Задачи с неопределенным ответом (задачи «можно ли...»), необходимость и достаточность примеров и контрпримеров
- Обратный ход или анализ с конца

Повторяются и обсуждаются общие принципы решения математических задач, подчеркивается необходимость обоснования математических утверждений, актуализируются понятия частного и общего случая, закрепляется понимание различий между доказательством и проверкой на частных примерах, учащиеся приобретают опыт мыслительного, образного и предметно-манипулятивного конструирования. Формируются навыки работы с основными логическими конструкциями, такими как следствие, равносильность, необходимость, достаточность, существование, всеобщность. Логические понятия, связки, схемы рассуждения, общие принципы решения задач и доказательств, полученные на лекционных занятиях, закрепляются при решении практических задач с устным или письменным изложением решений. Уделяется внимание задачам с неопределенным ответом типа «можно ли...», отмечается принципиальное различие схемы доказательства для каждого из вариантов ответов.

Практика: Решение задач на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез, на конструирование примеров и контрпримеров, полный перебор комбинаций.

РАЗДЕЛ 2. Введение в оптимизационные задачи (6 ч.)

Теория:

- Построение точных оценок в задачах
- Задачи типа «оценка + пример»

Рассматриваются примеры задач на построение точных оценок (задачи типа «оценка плюс пример» – синтез логического обоснования и конструирования). Обязательно делается акцент, что решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

- 1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);
- 2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4-5 баллов, второй шаг – в 2-3 балла. Тем самым, не указав при решении задачи на олимпиаде тот или иной шаг, можно потерять баллы.

Практика: Решение задач на построение точных оценок (задачи типа «оценка плюс пример» – синтез логического обоснования и конструирования), на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины. Выполнение проверочной контрольной работы (2 уровня сложности) по итогам тем: «Общие принципы решения математических задач», «Введение в оптимальные задачи».

РАЗДЕЛ 3. Математическая логика (8 ч.)

Теория:

- Логика высказываний
- Таблицы истинности
- Логические задачи:
 - Задачи о турнирах и методы их решений
 - Задачи про «Рыцарей и лжецов»
 - Задачи про «Мудрецов»
- Принцип исключенного третьего
- Принцип включения-исключения

Учитывая значимую роль логических задач в развитии мышления и использование их в олимпиадах разного уровня, то продолжается разбор разного рода таких задач, уровень сложности которых соответствуют 7 классу. Обучающиеся оттачивают навык на практических занятиях, учатся составлять самостоятельно таблицы истинности. Также школьники знакомятся с новыми принципами - принцип исключенного третьего и принцип включения-исключения. Формула включения-исключения для двух множеств рассматривается с детьми в 5 классе при изучении множеств. Данная формула рассматривается наглядно с помощью диаграммы Эйлера, тем самым осуществляя пропедевтику принципа включения-исключения для n -множеств. В 7 классе данный принцип раскрывается в полной форме, решаются олимпиадные задачи, соответствующие возрастному уровню.

Практика: Самостоятельное составление обучающимися таблицы истинности, решение логических задач.

РАЗДЕЛ 4. Принцип Дирихле (6 ч.)

Теория:

- Основные понятия
- Принцип Дирихле в задачах

Изучается простой и обобщенный принцип Дирихле. При решении практических задач внимание учащихся обращается на различные интерпретации принципа Дирихле в задачах с принципиально различными объектами. Обсуждаются некоторые простейшие свойства числовых неравенств, знание которых и умение их применять закрепляются при самостоятельном решении практических задач. Общая схема доказательства с использованием принципа Дирихле иллюстрируется рассмотрением задач из элементарной теории чисел и комбинаторики. Геометрическая интерпретация принципа Дирихле вводится через интуитивные представления о покрытии

отрезков и фигур, о свойствах мер (длин отрезков, площадей плоских фигур и поверхностей объемных тел).

Практика: Решение задач по теме. Выполнение проверочной контрольной работы (2 уровня сложности) по итогам тем: «Математическая логика», «Принцип Дирихле».

РАЗДЕЛ 5. Теория чисел (12 ч.)

Теория:

- Позиционные и непозиционные системы счисления
- Десятичная система счисления и признаки делимости
- Последняя цифра в числе
- Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 и др.
- Основная теорема арифметики
- Алгоритм Евклида
- Арифметика остатков
- Сравнения по модулю
- Малая теорема Ферма

Вводится общее понятие систем счисления и их разновидностей. Особое внимание уделяется десятичной системе счисления, для которой рассматривается ряд признаков делимости (с доказательствами). Навыки применения признаков делимости закрепляются в ходе решения задач. Повторяется алгоритм Евклида, так как он часто встречается в задачах на математических олимпиадах.

В ходе изучения темы обобщается понятие остатка, фактически трансформируясь в понятие сравнимости по модулю. Свойства сравнимости по модулю как разбираются с преподавателем, так и предлагаются к самостоятельному доказательству (под контролем преподавателя, с разбором трудных случаев). При обсуждении решения практических задач демонстрируется эффективность аппарата сравнений по модулю для решения и оформления решений задач, при решении которых закрепляются навыки применения свойств сравнений по модулю.

Практика: Решение задач по теме. Выполнение проверочной контрольной работы (2 уровня сложности) по теме «Теория чисел».

РАЗДЕЛ 6. Инвариант (6 ч.)

Теория:

- Понятие инварианта
- Инварианты, связанные с четностью
- Инварианты, связанные с делимостью и остатками
- Инварианты, связанные с раскраской

Знакомство с понятием инварианта на простейших примерах (подсчет двумя способами), после чего данное понятие расширяется. Вырабатываются умения поиска инвариантов в изменяющейся системе, выбора из них необходимого для решения поставленной задачи. При решении задач на исследование инвариантов, связанных с раскраской, учащиеся знакомятся с идеей раскрашивания (нумерации) некоторых объектов для выявления их

свойств и закономерностей, знакомятся с некоторыми стандартными способами раскрасок и приобрести опыт применения этой идеи в различных ситуациях. Задачи на разрезание помогают как можно раньше формировать геометрические представления у школьников на разнообразном материале. При решении таких задач возникает ощущение красоты, закона и порядка в природе.

Практика: Решение задач на исследование инвариантов, связанных с раскраской, решение задач на разрезание.

РАЗДЕЛ 7. Комбинаторика (10 ч.)

Теория:

- Подмножества элементов
- Сочетания, размещения, перестановки с повторениями и без повторений
- Треугольник Паскаля
- Бином Ньютона
- Свойства биномиальных коэффициентов

Обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций (по большей части связанных с подсчетом количества подмножеств или наборов элементов некоторого конечного множества), способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения. Способ подсчета упорядоченных наборов (кортежей) и неупорядоченных наборов (подмножеств) предварительно демонстрируется на простейших задачах с использованием полного перебора, после чего на задачах с большим количеством элементов обсуждается неконструктивный способ подсчета количества комбинаций, в результате выводятся общие формулы подсчета количества комбинаций указанного вида, навык использования которых закрепляется при решении задач.

Особое внимание уделяется комбинаторному доказательству свойств биномиальных коэффициентов, однако демонстрируется и способ доказательства с помощью преобразования выражающих число сочетаний алгебраических выражений (учащимся предлагается проделать выкладки самостоятельно).

Практика: Решение задач по теме. Выполнение проверочной контрольной работы (2 уровня сложности) по итогам тем: «Инвариант», «Комбинаторика».

РАЗДЕЛ 8. Теория графов (8 ч.)

Теория:

- Виды графов. Изоморфизм графов
- Пути и циклы, Эйлеровы обходы
- Связность графов, степени вершин
- Деревья, их свойства
- Планарные и плоские графы
- Теорема Эйлера
- Ориентированные графы

Обсуждается эффективность представления связанной с задачей системы в схематической форме с помощью графов. На примерах иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей.

Вводятся основные определения теории графов (вершины, ребра, смежность, инцидентность, путь). Введенные понятия развернуто иллюстрируются на конкретных примерах, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов.

В данной теме изучаются виды графов. Обучающиеся закрепляют умения применять графовые модели в анализе и решении задач, иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, в том числе ориентированного, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей. Рассматриваются конкретные примеры задач, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов. Вводится понятие изоморфизма графов, особое внимание уделяется топологическим свойствам графа. Рассматриваются деревья и их свойства. Практические задачи направлены на закрепление знаний свойств деревьев и плоских графов, а также навыков применения данных свойств. Формулируется и доказывается теорема Эйлера.

Практика: Решение задач по теме.

РАЗДЕЛ 9. Геометрия (10 ч.)

Теория:

- Геометрические неравенства
- Движения. Углы и площади
- Клетчатая геометрия, формула Пика
- Решение геометрических задач

С использованием изученных свойств алгебраических неравенств обучающиеся выводят ряд геометрических неравенств. В качестве «геометрической основы» для этого предварительно используется неравенство треугольника, после чего с использованием свойств и метрических соотношений в треугольнике выводятся новые базовые неравенства, которые в дальнейшем используются при решении геометрических задач (геометрические неравенства, оптимизационные геометрические задачи).

Обсуждаются свойства движений и подобия, некоторые свойства обосновываются с помощью доказательств, для некоторых на данном этапе проводится только иллюстрация на примерах. Демонстрируется связь данных геометрических процессов с метрическими соотношениями и неравенствами в геометрических фигурах. Знание рассмотренных свойств закрепляется при решении задач.

Решаются геометрические задачи на листе в клеточку. Формулировки и решения этих задач отличаются от обычных задач из действующих учебников и задачников по геометрии и, в то же время, они не требуют дополнительных сведений, направлены именно на обобщающее повторение основного курса геометрии 7-9 классов, на его более глубокое освоение и понимание, выработку необходимых геометрических компетенций. Решение каждой предложенной задачи требует применения геометрических знаний в необычной ситуации, что позволяет проверить качество освоения геометрического материала готовность ребенка использовать полученные знания и умения для решения нестандартных и исследовательских задач. Чаще всего в подобных упражнениях необходимо найти площадь фигуры. Решить такие задачи можно, вспомнив основные теоремы и свойства трапеции, треугольника, шестиугольника и т.д.

Практика: Решение задач по теме. Выполнение проверочной контрольной работы (2 уровня сложности) по итогам тем: «Теория графов», «Геометрия».

РАЗДЕЛ 10. Итоговое занятие (2 ч.)

Теория: Обобщение знаний обучающихся по пройденным темам.

Практика: Выполнение итоговой проверочной работы (решение задач).

3.2.2. Содержание учебного плана второго года обучения

РАЗДЕЛ 1. Вводное занятие. Входной контроль. Математическая логика (6 ч.)

Теория:

- Принцип включения-исключения
- Принцип исключенного третьего
- Логические задачи
- Задачи про турниры и игры

Практика: На занятиях решаются разнообразные логические задачи, в том числе задачи про турнир, математические игры, которые соответствуют возрастному уровню обучающихся и встречаются на олимпиадах для восьмиклассников. Также дети вспоминают и продолжают решать задачи на принцип исключенного третьего и принцип включения-исключения.

РАЗДЕЛ 2. Принцип математической индукции (10 ч.)

Теория:

- Полная индукция
- Примеры индуктивных рассуждений
- Математическая индукция в задачах на делимость
- Математическая индукция в доказательстве формул

При изучении метода математической индукции с обучающимися предварительно обсуждается возможность получения неверных выводов при осуществлении неполного перебора в задачах (иллюстрируется на конкретных примерах неверных гипотез, подтверждающихся для некоторого подмножества

случаев). К общей схеме математической индукции дети подводятся через последовательное решение задачи с возрастающим параметром условия, при этом индуктивный переход первоначально производится непосредственно для каждого случая, после чего предлагается обоснование корректности перехода для произвольного текущего состояния.

Метод математической индукции иллюстрируется на примере задач из различных областей математики, а навык его использования закрепляется в ходе решения практических задач. На ранних этапах желательно рекомендовать обучающимся проделывать несколько шагов индукции вручную для каждого значения параметра, после чего переходить к общему доказательству. Следует обратить внимание детей на полноту доказательства базы индукции (в зависимости от утверждений, как которые производится ссылка в индуктивном переходе).

Практика: Решение задач по теме. Выполнение проверочной контрольной работы (2 уровня сложности) по итогам тем: «Математическая логика», «Принцип математической индукции».

РАЗДЕЛ 3. Теория чисел (8 ч.)

Теория:

- Признаки делимости на 2^n , 5^n и др.
- Диофантовы уравнения, уравнения в простых числах
- Функция Эйлера, обобщенная малая теорема Ферма (теорема Эйлера)
- Теорема Вильсона
- Квадратичные вычеты

Повторяются основные свойства делимости, сравнений по модулю, свойства простых и составных чисел. Обучающимся предлагаются задачи на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования простых или составных чисел с указанными ограничениями (например, бесконечность множества простых чисел определенного вида). Вводятся понятия квадратичного вычета и квадратичного невычета, формулируются и доказываются простейшие свойства.

Понятие мультипликативной функции вводится на примере функции Эйлера, для нее же доказываются основные свойства. Навыки вычисления функции Эйлера и применения обобщенной малой теоремы Ферма закрепляются учащимися в ходе решения практических задач.

С обучающимися разбираются общие методы решения диофантовых уравнений (линейные уравнения, метод спуска, разложение на множители, оценка), формируется навык анализа и решения линейных диофантовых уравнений. Особое внимание уделяется самостоятельному решению уравнений в целых числах, в ходе которого на практических задачах закрепляется знание свойств делимости, остатков, сравнений.

Практика: Решение задач на конструктивные и неконструктивные методы доказательства существования простых или составных чисел с указанными ограничениями (например, бесконечность множества простых чисел определенного вида). Решение линейных уравнений.

РАЗДЕЛ 4. Инвариант (8 ч.)

Теория:

- Инварианты и полуинварианты
- Инварианты и полуинварианты, связанные с четностью, делимостью и остатками
- Инварианты и полуинварианты, связанные с раскраской
- Инварианты в теории графов
- Инварианты в геометрии и комбинаторной геометрии
- Сложные инварианты и полуинварианты

Актуализируются представление об инварианте, после чего данное понятие расширяется как путем расширения сфер применимости, так и введением понятия полуинварианта. Вырабатываются умения поиска инвариантов и полуинвариантов в изменяющейся системе, выбора из них необходимого для решения поставленной задачи, подбора адекватного полуинварианта. В ходе изучения инвариантов и полуинвариантов повторяются основные понятия и свойства из элементарной теории чисел, комбинаторики, теории графов, геометрии. При решении задач на исследование инвариантов и полуинвариантов дети отрабатывают навыки выбора неизменяемых величин, некоторыми стандартными способами выбора инвариантов и полуинвариантов, приобретают опыт применения идеи инвариантов и полуинвариантов при решении задач из различных областей математики в различных ситуациях.

Практика: Решение задач на исследование инвариантов и полуинвариантов. Выполнение проверочной контрольной работы (2 уровня сложности) по итогам тем: «Теория чисел», «Инвариант».

РАЗДЕЛ 5. Оптимизация (4 ч.)

Теория:

- Оценки и примеры
- Принцип крайнего

Повторяются свойства неравенств, они используются как этапы решения оптимизационных задач. В ходе построения точных оценок приобретается опыт конструирования (образного, мыслительного), закрепляется осознание потребности в синтезе конструктивного и аналитического доказательств (для реализации этого при решении задач особое внимание уделяется задачам вида «оценка плюс пример»).

Через решение практических задач обучающиеся подводятся к использованию принципа крайнего. Вводимый принцип рассуждений иллюстрируется на примерах из различных разделов математики (принцип крайнего в геометрии, в комбинаторной геометрии, в алгебре, в комбинаторике, в теории графов).

На практических примерах разбираются основные идеи поиска полуинварианта, анализа принимаемых им значений, применения его для построения точных оценок. При самостоятельном решении задач у детей развиваются умения поиска полуинвариантов, выбора из них необходимого для данной ситуации и его использования при решении оптимизационных задач.

Практика: Решение задач по теме.

РАЗДЕЛ 6. Текстовые задачи (8 ч.)

Теория:

- Задачи на проценты
- Задачи на части
- Задачи на смеси и сплавы
- Задачи на движение
- Задачи на работу
- Задачи с неравенствами
- Иные текстовые задачи

Рассматриваются способы решения нестандартных задач из олимпиад на проценты и части, смеси и сплавы, работу и движение. Темы «Проценты» и «Отношения (части)» изучаются непродолжительное время в рамках программы общеобразовательной школы, но задания по ним включаются в олимпиады разного уровня.

Практика: решения нестандартных задач из олимпиад на проценты и части, смеси и сплавы, работу и движение.

РАЗДЕЛ 7. Нестандартные уравнения и неравенства (8 ч.)

Теория:

- Уравнения, содержащие антье-функцию
- Средние величины, неравенства о средних, классические неравенства, неравенство Коши
- Доказательство неравенств
- Метод Штурма в доказательстве неравенств

Обучающиеся знакомятся с основными свойствами отношений предшествования и неравенств (транзитивность, антисимметричность, сложение и умножение неравенств). Свойства неравенств предварительно обсуждаются на примере числовых неравенств, после чего обобщаются и для алгебраических. На числовых неравенствах обязательно демонстрируется неприменимость некоторых операций к неравенствам (вычитание, деление неравенств). Знание свойств неравенств и умение их применять закрепляется в ходе решения практических задач.

Рассматриваются и отрабатываются при самостоятельном решении задач основные способы доказательства алгебраических неравенств (группировка, разложение на множители, выделение полного квадрата). Дети самостоятельно доказываются неравенства о средних для малого количества аргументов, после чего данные свойства обобщаются на случай произвольного количества аргументов, доказываются и обсуждаются с участием преподавателя. В ходе решения задач обучающиеся вырабатывают навыки выявления средних величин в алгебраическом выражении и использования неравенств о средних для доказательства алгебраических неравенств.

На простых примерах обучающиеся знакомятся с методом Штурма доказательства алгебраических неравенств, приобретают навык применения метода в ходе решения практических задач.

Практика: Решение задач по теме.

РАЗДЕЛ 8. Квадратный трехчлен (10 ч.)

Теория:

- Квадратный трехчлен и его коэффициенты
- Выделение полного квадрата
- Корни квадратного трехчлена
- Разложение на множители
- Теорема Виета
- Расположение корней квадратного трехчлена

Закрепляются знания о квадратном трехчлене. Обсуждаются основные свойства, закрепляются навыки оперирования с квадратным трехчленом: выделения полного квадрата, поиска корней, разложения на множители. Навыки использования теоремы Виета закрепляются при решении практических задач на конструирование квадратных трехчленов с заданными свойствами.

Вводится понятие квадратичной функции. Обсуждается зависимость величины и расположения корней квадратного трехчлена от его коэффициентов, свойства иллюстрируются с помощью геометрической интерпретации (графического представления функции и зависимости вида графика от соотношения коэффициентов).

Практика: Решение практических задач по теме.

РАЗДЕЛ 9. Геометрия (10 ч.)

Теория:

- Метод ГМТ
- Равенство и подобие треугольников
- Симметрия
- Движения и гомотетия
- Многоугольники
- Окружности, вписанные углы, вписанные и описанные многоугольники

На занятиях изучается новый метод геометрических точек. Задачи данного раздела помочь ребенку оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы, научить строить геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют условию $F(x) = 0$, $F(x) \leq 0$, $F(x) \geq 0$, научить обучающихся навыкам построения графиков с модулем и проведению преобразований с помощью изученных методов. Для решения остальных задач, как правило, теоретическая база в основном вводится на уроках геометрии в общеобразовательной школе, поэтому основное внимание уделяется самостоятельному решению практических задач на вычисление, построение, доказательство. Обсуждаются свойства движений, подобия, гомотетии. Демонстрируется связь данных геометрических процессов с метрическими соотношениями и неравенствами в геометрических фигурах. Отрабатываются технические навыки: последовательное вычисление углов в геометрических задачах, поиск цепочек подобий, равных углов и пропорциональных отрезков.

Знание рассмотренных свойств и полученные навыки закрепляются при решении задач.

Практика: Решение практических задач по теме.

РАЗДЕЛ 10. Итоговое занятие (2 ч.)

Теория: Обобщение знаний обучающихся по пройденным темам.

Практика: Выполнение итоговой проверочной работы (решение задач).

3.2.3. Содержание учебного плана третьего года обучения

РАЗДЕЛ 1. Вводное занятие. Входной контроль.

Теория: Вводное занятие по организационным вопросам, совместное обсуждение и решение задач с школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников.

Практика: Выполнение мини-олимпиады (решение задач).

РАЗДЕЛ 2. Геометрия (14 ч.)

Теория:

Треугольник:

- Принцип Карно
- Биссектрисы, высоты и описанная окружность
- Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек
- Прямая Эйлера

Окружность:

- Простейшие свойства окружности
- Вписанные и описанные окружности
- Вписанный угол
- Касание

Геометрические преобразования:

- Применения движений
- Классификация движений плоскости
- Применение подобия и гомотетии

Построения и геометрические места точек:

- Геометрические места точек
- Задачи на построение и ГМТ, связанные с площадями

Практика: Решение геометрических задач на онлайн-уроках и совместное обсуждение их решений. Также на практике происходит знакомство с динамическими математическими приложениями и программами. По завершению обучения проводится практическая работа по данной теме, с целью выявления уровня усвоения и последующей корректировки пробелов в знаниях.

Повторяются и обсуждаются школьные геометрические теоремы и материал, изученный на занятиях по данной программе в 7-8 классах. На базе школьных знаний и умений формулируются новые теоремы, которые не затрагиваются в школьной программе, однако явно облегчающие решение

геометрических задач на олимпиадах (например, принцип Карно). Изучаются новые методы решения задач (метод геометрических мест точек). Основное внимание уделяется нестандартному подходу к решению геометрических задач: учащиеся сами пробуют строить дополнительные построения, разбиения. Для работы используются дополнительное программное обеспечение, позволяющее легко визуализировать условия задач (например, Geogebra). Теоремы, общие принципы решения и доказательств, полученные на лекционных онлайн занятиях, закрепляются при самостоятельном решении практических задач с письменным изложением. Раздел геометрии в данной программе занимает значительное количество часов, так как на всероссийской олимпиаде в заданиях встречается как минимум две задачи на геометрический материал.

РАЗДЕЛ 3. Математические доказательства (12 ч.)

Теория:

Прямое доказательство

Метод математической индукции

Противопоставление

Доказательство от противного

Примеры и контрпримеры

Инварианты и полуинварианты

Вспомогательная раскраска

Принцип Дирихле

Принцип крайнего

Практика: Решение задач на доказательство, а также совместное обсуждение, какой метод доказательства будет эффективным в определенной задаче, включая обязательную проверку полноценности доказательства (рассматривает ли все возможные случаи, доказано ли каждое суждение в решении).

Все темы из данного раздела уже изучались по данной программе в 7 и 8 классах (в разных разделах). Однако умение строить доказательства является самым важным умением, которое должны освоить школьники в курсе математики. Школьная практика показывает, что в работе учителей преобладает тенденция учить ученика конкретному доказательству тех или иных теорем, но слабо ведётся работа по умению учеников вообще доказывать. Также в школьной программе не рассматриваются данные методы доказательства как самостоятельный элемент: школьная программа построена таким образом, что доказательства, как правило, встречаются в теории и более того, в учебнике полностью расписаны, тем самым задача школьников сводится к тому, что достаточно разобраться в тексте самого доказательства, а не провести самостоятельные размышления. Более того самих задач на доказательство в школьной программе – единичное число. Именно поэтому на олимпиадах задачи с доказательствами вызывают у детей сложности. В связи с этим в программе 9 класса необходимо повторить основные тезисы ранее изученных методов доказательства и научиться применять их на задачах, которые предлагаются на олимпиадах для 9 класса.

РАЗДЕЛ 4. Многочлены (8 ч.)

Теория:

Теорема Безу

Многочлены с целыми коэффициентами

Свойства коэффициентов многочлена

Корни многочлена

Практика: Решение задач по теме.

Рассматриваются многочлены над полями R , Q и над кольцом Z , вводятся понятия: степень многочлена, кольцо многочленов. Изучаются делимость, деление многочленов с остатком и алгоритмы деления с остатком, теорема Безу и следствия из теоремы Безу: теоремы о делимости на двучлен и о числе корней многочленов, полностью разложимые многочлены и система Виета, общая теорема Виета, кубические многочлены, теорема о существовании корня у полинома нечетной степени, симметрические, кососимметрические и возвратные многочлены.

РАЗДЕЛ 5. Метод «оценка + пример» в различных задачах (8 ч.)

Теория: Основная теория математического рассуждения «Оценка + пример» была рассмотрена в 7 классе. Учащиеся уже сталкивались с подобными задачами. Также тема была затронута в разделе «Оптимизация» и в 8 классе. Учитывая, что данное рассуждение является общим, т.е. его можно применить при решении задач на различные темы (и в геометрии, и в алгебре, и т.д.) и на разный уровень сложности, то задачи с требованием найти «наибольшее» / «наименьшее» не теряет свою актуальность и на олимпиадах 9 классе. Также данная тема хороша еще тем, что не только соединяет в себе остальные разделы программы (графы, геометрия, логика, алгебра и т.д.), но и комбинируется в решении с другими методами (принцип Дирихле, вспомогательная раскраска и т.д.). Поэтому в данном разделе как раз можно повторить ранее изученный материал на олимпиадных задачах для девятиклассников. Также дополнительно напомнить, что в таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4-5 баллов, второй шаг – в 2-3 балла. Тем самым, не указав при решении задачи на олимпиаде тот или иной шаг, можно потерять баллы.

Практика: Решение задач на нахождение точных оценок, на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины и обязательное построение примера, удовлетворяющему набору условий из решения.

РАЗДЕЛ 6. Игры, турниры и логические задачи (8 ч.)

Теория:

Математические игры

Турниры и таблицы

Рыцари и лжецы

Логические рассуждения в задачах

Практика: Решение логических задач и задач в решении которых используется цепочка логических рассуждений.

Учитывая значимую роль логических задач в развитии мышления и использование их в олимпиадах разного уровня, то продолжается разбор разного рода таких задач, уровень сложности которых соответствуют 9 классу. Помимо тех тем, которые были затронуты ранее в программе (Игры, турниры, рыцари и лжецы), на 3 году обучения включаются олимпиадные задачи решения которых строятся на логических рассуждениях. Обучающиеся учатся строить цепочки логических рассуждений с перебором всех возможных случаев, которые бы удовлетворяли условию задачи.

РАЗДЕЛ 7. Комбинаторика (4 ч.)

Теория:

Классическая комбинаторика

Теория графов

Практика: Решение задач по теме.

Вся необходимая теория была изучена на 1 и 2 году обучения. Однако в следствии того, что комбинаторный материал практически отсутствует в школьной программе, то обучающиеся забывают теорию, поэтому обязательно необходимо тезисное повторение тем «Комбинаторика» и «Теория графов». Основное внимание в данной теме ориентировано на решение задач, соответствующих уровню олимпиадных задач для 9 класса.

РАЗДЕЛ 8. Текстовые задачи (6 ч.)

Теория:

Задачи на проценты и части

Задачи на движение

Задачи на работу

Задачи на смеси и сплавы

Другие задачи на построение уравнений и неравенств

Практика: Решение нестандартных задач из олимпиад на проценты и части, смеси и сплавы, работу и движение, на построение уравнений и неравенств.

Продолжается изучение текстовых задач. Рассматриваются способы решения нестандартных задач из олимпиад на проценты и части, смеси и сплавы, работу и движение. Темы изучаются непродолжительное время в рамках программы общеобразовательной школы, поэтому основной теоретический материал очень знаком учащимся. В связи с этим акцент в данном разделе делается именно на применение нестандартных для школьной программы подходов к решению задач, рассматриваются текстовые задачи с различных олимпиад для 9 класса.

РАЗДЕЛ 9. Тожества, равенства и неравенства (4 ч.)

Теория: Тождества, равенства и неравенства

Практика: Решение задач по теме.

Тема «числовые тождества» практически базируется на школьном материале. Здесь ключевым фактором является разбор нестандартных применений стандартных числовых тождеств. Основная задача – научить учащихся видеть, где можно их применять, почувствовать в каких случаях можно привести задачу к стандартному виду. Это достигается путем решения как можно большего количества подобных задач. Важно в каждой задаче показать учащимся, как увидеть путь к верному решению: какие шаги попробовать сделать, какие варианты можно перебрать и т.п. Из теоретического материала следует объяснить различие тождества и равенства, и научить школьников правильно применять понятия.

В теме «неравенства» рассматриваются классические неравенства, как их можно применять в решении задач в качестве вспомогательных.

РАЗДЕЛ 10. Уравнения и системы уравнений (4 ч.)

Теория: Уравнения и системы уравнений

Практика: Решение задач по теме.

На занятиях рассматриваются уравнения высших степеней. Учащиеся знакомятся с возвратными уравнениями. Решаются задачи с системами линейных уравнений и с системами нелинейных уравнений, а также симметрические системы уравнений. Школьники знакомятся с примерами, в решениях которых используются нестандартные подходы. Обязательно необходимо напомнить учащимся про Диафантовы уравнения.

РАЗДЕЛ 11. Итоговое занятие (2 ч.)

Теория: Обобщение знаний обучающихся по пройденным темам.

Практика: Выполнение итоговой проверочной работы (решение задач).

4. Планируемые результаты

Ожидаемый результат 1-го года обучения

Личностными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- формирование представления о математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для общественного прогресса;
- потребность сотрудничества со сверстниками;
- умение систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- проявление любознательности, сообразительности при решении разнообразных математических заданий;

Метапредметными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- проявление у обучающихся устойчивого интереса к математике;
- развитие способности к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные результаты освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- освоение теоретических знаний основных разделов учебно-тематического плана программы;
- овладение специальной математической терминологией, развитие математической речи;
- приобретение опыта решения нестандартных задач;
- развитие креативности, нестандартного мышления и творческого подхода к поиску решения задач.

Ожидаемый результат 2-го года обучения

Личностными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- умение работать в команде, проявление лидерских качеств;
- умение глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- проявление любознательности, сообразительности при решении разнообразных математических заданий;

Метапредметными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- проявление у обучающихся устойчивого интереса к математике;
- развитие способности к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные результаты освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- освоение теоретических знаний основных разделов учебно-тематического плана программы;
- овладение специальной математической терминологией, совершенствование математической речи;
- приобретение опыта решения нестандартных задач;
- развитие креативности, нестандартного мышления и творческого подхода к поиску решения задач

Ожидаемый результат 3-го года обучения

Личностными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- умение работать в команде, проявление лидерских качеств;
- умение глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- проявление любознательности, сообразительности при решении разнообразных математических заданий;

Метапредметными результатами освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- проявление у обучающихся устойчивого интереса к математике;
- развитие способности к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);

Предметные результаты освоения дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи по математике и стратегии их решения» является:

- освоение теоретических знаний основных разделов учебно-тематического плана программы;
- овладение специальной математической терминологией, совершенствование математической речи;
- приобретение опыта решения нестандартных задач;

- развитие креативности, нестандартного мышления и творческого подхода к поиску решения задач.
- развитие более строгого подхода к математическим задачам плавно переходя от занимательной математики к математике, как к строгой науке со сложными задачами.
- развитие умения приведения полноценного доказательства, которое строится на рассмотрении всех возможных ситуаций в конкретной задаче и рассуждениях, которые имеют строгое доказательство.

Раздел № 2 «Комплекс организационно-педагогических условий»

1. Календарный учебный график

Количество учебных недель: 36 недели

Количество учебных дней: 36 дней

2. Условия реализации программы

2.1. Материально-техническое обеспечение

Для реализации дополнительной общеразвивающей программы «Нестандартные математические задачи и стратегии их решения» необходимый перечень материально-технического обеспечения включает в себя:

- технические средства обучения (компьютер/ноутбук) с подключением к сети Интернет,
- графический планшет,
- программное обеспечение, включая динамические математические приложения.

1.2. Кадровое обеспечение

Настоящая программа может быть реализована педагогом дополнительного образования или учителем, имеющими высшее профессиональное образование в области математики. Желателен опыт работы с одаренными детьми, умение стимулировать их познавательную активность, поддерживать различные виды интеллектуальной и творческой деятельности; наличие высокого потенциала и способностей к профессиональному саморазвитию и самосовершенствованию.

3. Формы аттестации

3.1. Формы отслеживания и фиксации образовательных результатов

Подведение итогов реализации программы представляет комплексную систему, которая включает в себя:

1. Внутренние результаты:

1.1. Текущий контроль освоения программы

Структура построения занятий имеет следующую схему: после каждого изучения новых двух тем проводится проверочная работа в виде мини-олимпиады. Такой подход дает возможность анализировать текущий результат школьников и увидеть пробелы в знаниях учащихся. Проверочная контрольная работа состоит из двух уровней сложности: на первом уровне представлены задачи из олимпиад муниципального уровня, на втором – задачи из олимпиад регионального уровня. Уровень сложности обучающиеся могут выбрать самостоятельно, тем самым они учатся проводить самооценку своих знаний и возможностей. Уровневая система проверки знаний по окончании цикла занятий в учебном году показывает на каком уровне освоил программу тот или иной ребенок. Следует заметить, что не у каждого обучающегося самоцель обучения по дополнительной программе – призовые места на региональных и

всероссийских олимпиадах. Некоторые приходят на занятия с целью получить дополнительное математическое развитие, способствующее более успешному освоению углубленного школьного курса математики. Как правило, группа делится на очень способных детей и детей, у которых есть интерес к математике, но не хватает математических способностей для решения сложных нестандартных задач. И в такой ситуации, два уровня сложности заданий способствуют гармоничному развитию математических способностей у более «сильных» в знаниях детей и не занижает интереса к математике и уровень уверенности в себе у менее способных детей, развивая при этом спортивный интерес и мотивацию перейти на сложный уровень.

1.2. Итоговый контроль освоения программы

В конце учебного года, как правило, проводится итоговая контрольная работа. Данная работа едина для всех учащихся группы. Это дает возможность педагогу проанализировать уровень знаний как у всей группы, так и индивидуально по каждому учащемуся, а непосредственно самому ребенку – оценить себя в рамках всей группы. По результатам контрольной работы педагог может оценить пробелы в знаниях у каждого учащегося и дать рекомендации и дополнительные задания по проблемной теме для самостоятельной работы учащегося на летних каникулах.

2. Внешние результаты

Внешние результаты подразумевают результаты учащихся в различных математических соревнованиях: олимпиадах, играх, викторинах, конкурсах и т.д.

Все полученные во время обучения результаты, как внутренние, так и внешние, заносятся в рейтинговую таблицу группы. Обучающимся предоставляется доступ к их личному результату и месту в рейтинговой таблице в личном кабинете в онлайн классе. Общий результат всей группы доступен только для педагога.

Критерии и показатели уровня освоения обучающимися содержания программы

Критерии	Показатели	Индикаторы	Число баллов	Методы диагностики
<i>Предметные результаты:</i>				
Теоретическая подготовка				
Уровень теоретических знаний по основным разделам учебно-тематического плана программы	Соответствие теоретических знаний программным требованиям	не усвоил теоретическое содержание программы	0	Наблюдение, тестирование, опросы, проверочные контрольные работы, итоговая контрольная работа и др.
		овладел менее чем 1/2 объема знаний, предусмотренных программой	1	
		объем усвоенных знаний составляет более 1/2	2	
		освоил весь объем знаний, предусмотренных программой	3	
Уровень владения специальной математической	Осмысленность и правильность использования	не употребляет специальные термины	0	Наблюдение, собеседование
		знает отдельные	1	

Критерии	Показатели	Индикаторы	Число баллов	Методы диагностики
терминологией	специальной терминологии	специальные термины, но избегает их употреблять	2	
		сочетает специальную терминологию с бытовой	3	
Практическая подготовка				
Уровень умений и навыков решения нестандартных задач и задач повышенной сложности	Соответствие практических умений и навыков	не овладел умениями и навыками	0	Наблюдение, тестирование, опросы, проверочные контрольные работы, итоговая контрольная работа и др.
		овладел менее чем 1/2 предусмотренных умений и навыков	1	
		объем усвоенных умений и навыков составляет более 1/2	2	
		овладел практически всеми умениями и навыками, предусмотренными программой	3	
Уровень креативности, нестандартного мышления и творческого подхода к поиску решения задач	Наличие творческого подхода при выполнении практических заданий	начальный (элементарный) уровень развития креативности - ребенок в состоянии выполнять лишь простейшие практические задания педагога	0	Наблюдение, тестирование, опросы, проверочные контрольные работы, итоговая контрольная работа и др.
		репродуктивный уровень – в основном, выполняет задания на основе образца	1	
		творческий уровень (I) – видит необходимость принятия творческих решений, выполняет практические задания с элементами творчества с помощью педагога	2	
		творческий уровень (II) - выполняет практические задания с элементами творчества самостоятельно	3	
Личностные результаты:				
Уровень проявления любознательности и самостоятельности при выполнении разнообразных заданий	Наличие мотивации к обучению	пропускает занятия, отсутствует интерес к обучению	0	Наблюдение
		малоактивен, наблюдает за деятельностью других, забывает выполнить задание, результативность низкая	1	

Критерии	Показатели	Индикаторы	Число баллов	Методы диагностики
		активен, проявляет устойчивый познавательный интерес, трудолюбив, добивается хороших результатов	2	
		активен, проявляет устойчивый познавательный интерес, целеустремлен, трудолюбив и прилежен, добивается высоких результатов, инициативен	3	
Умение работать в команде, проявлять лидерские качества	Наличие ответственности и лидерских качеств	уклоняется от решения задач, часто не дисциплинирован, нарушает правила поведения, не всегда реагирует на воспитательные воздействия, в творческую деятельность не вступает, уровень выполнения заданий, как правило, репродуктивный.	0	Наблюдение
		неохотно решает задачи, начинает работу, но часто не доводит ее до конца, справляется с поручениями и соблюдает правила поведения только при наличии контроля и требовательности преподавателя или товарищей, способен принимать творческие решения, но, в основном использует традиционные способы решения	1	
		решает задачи охотно, ответственно, способен принимать творческие решения, но, в основном, использует традиционные способы решения	2	
		решает задачи самостоятельно и с интересом, ответственен, часто по собственному желанию решает дополнительные задачи, имеет высокий творческий потенциал, находит нестандартные решения, новые способы выполнения заданий	3	

Итоговый показатель подсчитывается следующим образом:

- Высокий уровень – (15 – 18 балл) - учащийся умеет применять полученные знания и умения для выполнения самостоятельных заданий, его деятельность отмечена умением самостоятельно оценивать различные ситуации, явления, факты, выявлять и отстаивать личную позицию, при решении задач использует творческий подход, уровень результативности и мотивации высокий.

- Средний уровень – (11 – 14 баллов) - учащийся воспроизводит основной программный материал, выполняет задания по образцу, обладает элементарными умениями учебной деятельности, самостоятельно применяет знания в стандартных ситуациях, исправляет допущенные ошибки.

- Низкий уровень – (0 – 10 баллов) - учащийся различает объекты изучения, воспроизводит незначительную часть программного материала, с помощью педагога выполняет элементарные задания, уровень результативности и мотивации низкий.

4. Методическое обеспечение

Основной формой организации образовательного процесса по представленной программе является дистанционное обучение. Учебное занятие, ведущая цель которого: активный поиск и приобретение новых знаний учащимися, развитие опыта детей, включение их в атмосферу сотрудничества проходит в виде онлайн-конференции, которая состоит из двух частей:

- Первая часть – обсуждение новой темы или актуализация ранее полученных знаний. Для того чтобы занятия не были утомительными, теоретический материал должен преподноситься в интересной и доступной форме. Целесообразно на занятиях использовать форму диалога, побуждая учащихся к самостоятельным размышлениям, спорам, доказательствам. При этом формируется аналитическое мышление, развивается навык публичных выступлений, расширяется объем знаний путем обмена информацией. Весь курс обучения представляет собой единую систему взаимосвязанных тем, которые постепенно усложняются от класса к классу. Преподавание материала предусматривается по «восходящей спирали», т.е. периодическое возвращение к темам на более высоком и сложном уровне.

- Вторая часть – решение задач и их дальнейшее обсуждение. Закрепление пройденного материала, приобретение умений и навыков происходит в практической деятельности учащихся, поэтому основное внимание при проектировании учебного занятия уделяется практической части программы. В практической работе желательно добиваться самостоятельности в действиях детей, вырабатывая у них систему собственных взглядов на способы решения задач, воспитывать ответственность. Задания, предлагаемые учащимся, соответствуют их возрасту и уровню подготовки.

Метод обучения через задачи базируется на следующих дидактических положениях:

- наилучший способ обучения учащихся, дающий им сознательные и прочные знания и обеспечивающий одновременное их умственное развитие, заключается в том, что перед учащимися ставятся последовательно одна за

другой – посильные теоретические и практические задачи, решение которых даёт им новые знания;

- с помощью задач, последовательно связанных друг с другом, можно ознакомить учеников даже с довольно сложными математическими теориями;
- усвоение учебного материала через последовательное решение задач происходит в едином процессе приобретения новых знаний и их немедленного применения, что способствует развитию познавательной самостоятельности и творческой активности учащихся.

Освоение содержания программы способствует интеллектуальному, творческому, эмоциональному развитию учащихся. При реализации содержания программы учитываются возрастные и индивидуальные возможности подростков, создаются условия для успешности каждого ребенка. При отборе содержания и структурирования программы использованы общедидактические принципы:

- доступности;
- преемственности;
- перспективности;
- развивающей направленности;
- учета индивидуальных особенностей;
- органического сочетания обучения и воспитания, практической направленности и посильности.

Помимо онлайн-конференций программой также предусмотрены контрольные работы, которые показывают срез текущей успеваемости у группы. Контрольные работы выполняются самостоятельно обучающимися в течение недели и решения отправляются на проверку педагогу через личный кабинет в онлайн-классе. После проверки всех работ педагогом, оценки выставляются в электронный журнал, а каждому ребенку индивидуально направляются замечания и рекомендации по исправлению ошибок и/или устранению пробелов в знаниях. По самым сложным задачам, которые вызвали затруднения в решении у большинства, проводится онлайн-разбор.

Эффективность и результативность программы зависит от соблюдения следующих условий:

- добровольность участия и желание проявить себя;
- сочетание индивидуальной, групповой и коллективной деятельности;
- сочетание инициатив детей с направляющей ролью педагога;
- занимательность и новизна содержания, форм и методов работы;
- эстетичность всех проводимых мероприятий;
- четкая организация и тщательная подготовка всех запланированных мероприятий;
- наличие целевых установок и перспектив деятельности, возможность участвовать в конкурсах, олимпиадах и проектах различного уровня;
- широкое использование методов педагогического стимулирования активности учащихся;
- гласность, открытость, привлечение детей с разными способностями и уровнем овладения математикой.

5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

5.1. *Нормативно-правовые документы*

1. Федеральный Закон от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» с изменениями.
2. Федеральный закон от 31.07.2020 г. № 304-ФЗ о внесении изменений в Федеральный закон Российской Федерации «Об образовании в Российской Федерации по вопросам воспитания обучающихся».
3. Приказ Министерства труда и социальной защиты РФ № 652н от 22 сентября 2021 г. «Об утверждении профессионального стандарта "Педагог дополнительного образования детей и взрослых».
4. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 23.08.2017 г. № 816 (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации от 18.09.2017 г., регистрационный № 48226) «Порядок применения организациями, осуществляющими образовательную деятельность, электронного обучения, дистанционных образовательных технологий при реализации образовательных программ».
5. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28.09.2020 № 28 «Об утверждении СП 2.4.3648 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи».
6. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28.01.2021 N 2 «Об утверждении санитарных правил и норм СанПиН 1.2.3685-21 «Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания».
7. Постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 02 ноября 2021 г. № 27 «О внесении изменения в пункт 3 постановления Главного государственного санитарного врача РФ от 30.06.2020 № 16 «Об утверждении санитарно-эпидемиологических правил СП 3.1/2.4.3598-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации работы образовательных организаций и других объектов социальной инфраструктуры для детей и молодежи в условиях распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-19)».
8. Постановлением Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 21.03.2022 г. № 9 «О внесении изменений в санитарно-эпидемиологические правила СП 3.1/2.4.3598-20 "Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации работы образовательных организаций и других объектов социальной инфраструктуры для детей и молодежи в условиях распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-2019)", утвержденные постановлением Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 30.06.2020 № 16»;

9. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 27.07.2022 № 629 «Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам»;
10. Распоряжение Правительства РФ от 31 марта 2022 г. № 678-р «Концепция развития дополнительного образования детей до 2030 года».

5.2. Учебно-методическая литература

1. Агаханов Н.Х., Купцов Л.П., Нестеренок Ю.В. и др. Математические олимпиады школьников. - М.: Просвещение: Учеб. лит., 1997. - 208 с.
2. Агаханов Н.Х., Терешин Д.А., Кузнецова Г.М. Школьные математические олимпиады. - М., Дрофа, 1999. - 131 с.
3. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел для математических школ. – М., МЦНМО, 2001
4. Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. – М., МЦНМО, 2004
5. Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике. 3-е изд. — Ростов н/Д : Феникс, 2008. — 364, [1] с.: ил. — (Библиотека учителя).
6. Бугулов Е.А., Толасов Б.А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. - Орджоникидзе, 1962. - 226 с.
7. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. - М.: Бюро Квантум, 2007. — 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып 100. Приложение к журналу «Квант» № 2/2007.)
8. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969
9. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.-Л., Гостехиздат, 1952
10. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. — Челябинск: Взгляд, 2005. — 271 с. — (Нестандартные задачи по математике).
11. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. - Челябинск: «Взгляд», 2004. — 448 с.
12. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. - М.: Просвещение, 1986. — 303с.
13. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. - Киров, "Аса", 1994. - 272 с.
14. Голенищева-Кутузова Т.И., Казанцев А.Д., Кудряшов Ю.Г. и др. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Ч. I / — М.: МЦНМО, 2010. — 248 с.
15. Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004. — 560 с.
16. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика. -М.: Бюро Квантум, 2006. — 128с. (Библиотечка «Квант». Вып. 97. Приложение к журналу «Квант» № 5/2006.)
17. Заславский А.А., Скопенков А.Б. и Скопенков М. Б. Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки — к профессии— М.: МЦНМО, 2018. — 592 с.

18. Коннова Е.Г.; под ред. Ф.Ф.Лысенко. Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад.: 6-9 класс. Ч. 2.: учебно-методическое пособие. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2009
19. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.: Наука, 1980
20. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1961.
21. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
22. Севрюков П.Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / П.Ф. Севрюков. — Изд. 2-е. — М. : Илекса ; Народное образование ; Ставрополь : Сервисшкола, 2009. - 112 с.
23. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы 8-е изд., испр. и доп. — М.: Айрис-пресс, 2009. — 256 с: ил. — (Школьные олимпиады).
24. Фарков А.В. Методы решения олимпиадных задач. 10 – 11 класс. – М.: ИЛЕКСА, 2016. - 110 с.
25. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993—2005 г./ Под ред. В.М. Тихомирова. - М.: МЦНМО, 2006. - 456 с.
26. Шеховцов В.А. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности. - Волгоград: Учитель, 2009. - 99 с.
27. Интернет-ресурсы:
 - Олимпиады для школьников olimpiada.ru/
 - Всероссийская олимпиада по математике math.rusolymp.ru/
 - Московская математическая олимпиада школьников olympiads.mcsme.ru/mmo/
 - Санкт-Петербургские математические олимпиады www.pdmi.ras.ru/~olymp/
 - Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников www.turgor.ru
 - Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования www.mcsme.ru/
 - Задачная база олимпиадных задач zaba.ru www.problems.ru/

1-ый год обучения

Тема 1. Общие принципы решения математических задач.

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* В лаборатории в течение месяца рождались хомячки. Всего родилось 65 малышей. Докажите, что среди них есть трое, родившиеся в один день.
- *Задача 2.* В мешке лежат 100 красных, 50 белых и 18 синих шариков. Докажите, что, вытащив из мешка 5 шариков, мы найдем хотя бы два одноцветных.
- *Задача 3.* В магазин привезли 30 ящиков яблок трех сортов: «румянка», «антоновка» и «солнцедар». В каждом ящике лежат яблоки одного сорта. Продавец утверждает, что у него нет десяти ящиков с яблоками одного сорта. Не ошибся ли он?
- *Задача 4.* У маляра есть банки только с красной и синей краской. Банки с красной краской всегда большие. Есть маленькая банка с краской. Докажите, что краска в ней синяя.
- *Задача 5.* В некотором царстве есть несколько озер, соединенных между собой реками. Может ли быть так, что из каждого озера вытекают четыре реки, и в каждое озеро впадает пять рек?
- *Задача 6.* В поход пошли 25 туристов. Самому старшему из них 40 лет, а самому младшему – 17 лет. Верно ли, что среди туристов есть ровесники?
- *Задача 7.* В Солнечном городе живут 30 коротышек. У каждого из них есть четыре воздушных шарика: красный, синий, желтый и зеленый. Докажите, что коротышки не смогут так поменяться шариками, чтобы у каждого из них все четыре шарика оказались одноцветными.
- *Задача 8.* Докажите, что нельзя разложить 65 конфет на 11 кучек так, чтобы количество конфет в разных кучках было различным.
- *Задача 9.* Две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трём углам другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?
- *Задача 10.* а) Можно ли расставить знаки + или – между каждыми двумя соседними цифрами числа 1 2 3 4 5 6 7 8 9, чтобы полученное выражение равнялось нулю? б) Тот же вопрос, только знаки можно ставить между некоторыми (не обязательно всеми) цифрами.
- *Задача 11.* Можно ли квадрат разрезать на прямоугольники, никакие два из которых не имеют общей стороны?
- *Задача 12.* Числа от 1 до 97 расставили по окружности в произвольном порядке. Может ли сумма любых трёх стоящих подряд чисел быть чётной?
- *Задача 13.* Существует ли самопересекающаяся а) 6-звенная; б) 9-звенная ломаная, пересекающая каждое своё звено ровно один раз? Верно ли, что при любом целом n число $n^2 + n + 41$ простое?
- *Задача 14.* а) Взвод солдат построили в шеренгу. При этом оказалось, что рост каждого солдата (кроме крайних) равен полусумме ростов его соседей. Верно ли, что все солдаты одного роста? б) Взвод солдат построили по кругу. При этом оказалось, что рост каждого солдата равен полусумме ростов его соседей. Верно ли, что все солдаты одного роста?
- *Задача 15.* Существует ли выпуклый четырёхугольник, у которого нет ни центра симметрии, ни оси симметрии, но который можно разрезать прямой на две равные части?
- *Задача 16.* Верно ли, что при любом целом n число $n^3 - n$ делится на 6? Докажите, что среди ныне живущих на Земле людей есть двое родившихся одновременно, с точностью до секунды. (Всего на земле 6 миллиардов жителей; людей старше 150 лет не существует.)

Тема 2. Введение в оптимизационные задачи

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8 ?
- **Задача 2.** а) 8 кузнецов должны подковать 10 лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите, лошадь не может стоять на двух ногах.) б) А если кузнецов 48, а лошадей 60?
- **Задача 3.** Найдите наименьшее натуральное число:
 - а) кратное 10, сумма цифр которого равна 10;
 - б) кратное 100, сумма цифр которого равна 100;
 - в) кратное 5, сумма цифр которого равна 25.
- **Задача 4.** Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка:
 - а) в любом квадрате 2×2 ?
 - б) в любом уголке из трёх клеточек?
- **Задача 5.** В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?
- **Задача 6.** У каждого из 222 шестиклассников на Малом Мехмате не более двух близких приятелей. Оказавшись в одном помещении, два близких приятеля начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Какое наименьшее число аудиторий необходимо иметь Евгению Александровичу, чтобы обеспечить бесперебойную работу всей параллели 6 класса?
- **Задача 7.** На старт «Весёлого забега» на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Каково минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?
- **Задача 8.** На какое наибольшее количество разных прямоугольников можно разрезать по линиям сетки:
 - а) прямоугольник 5×6 клеточек;
 - б) прямоугольник 12×6 клеточек;
 - в) прямоугольник 2×36 клеточек?

Тема 3. Математическая логика

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** При любом ли значении x истинно следующее утверждение: «если $3x - x^2 = 1$, то $|x|/x = 1$ »?
- **Задача 2.** Путешественник приехал в страну, где имеются всего два города. В одном из них живут рыцари, а в другом - лжецы. При этом жители одного города могут приезжать в гости в другой город. В одном из городов путешественник встретил местного жителя. Можно ли задав ему один вопрос (на который можно ответить "да" или "нет"), выяснить:
 - а) в каком городе он находится,
 - б) жителем какого города является встреченный абориген?
- **Задача 3.** Между Колей и Сашей, увлекающимися решением логических задач, произошёл следующий разговор:
 - Коля: Я купил три полки для книг и расставил на них все свои учебники. Когда я сосчитал, сколько книг стоит на каждой полке и перемножил эти три числа, у меня получилось 72. Ты ведь знаешь, сколько у меня учебников?
 - Саша: да, знаю.
 - Коля: тогда скажи, сколько книг стоит на каждой полке?

- Саша: у меня не хватает данных.
- Коля: полка, где было меньше всего книг, выглядела хуже остальных, и я поставил туда вазу с цветами.
- Саша: теперь мне ясно, вот ответ ...

И Саша точно сказал, сколько книг стоит на каждой полке. Скажите и Вы.

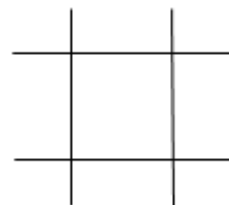
- **Задача 4.** За круглым столом сидят рыцари и лжецы — всего 12 человек. Каждый произнёс: «Все, кроме меня и моих соседей — лжецы». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидело за столом?
- **Задача 5.** Вася задумал число 1, 2 или 3. Петя хочет отгадать задуманное число, задав один вопрос, допускающий три ответа: «да», «нет» или «не знаю». Какой вопрос следует задать?
- **Задача 6.** Каждый из четырех гномов - Бенья, Веня, Женя, Сеня - либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор: Бенья - Веня: «Ты врун»; Женя - Веня: «Сам ты врун»; Сеня - Женя: «Да оба они вруны, - (подумав), - впрочем, ты тоже». Кто из них говорит правду?
- **Задача 7.** Предположим, что следующие утверждения истинны:
 - среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;
 - люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.
 - Является ли в таком случае истинным утверждение, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?
- **Задача 8.** Про некоторую фигуру на плоскости известно, что она переходит в себя при повороте на угол 48° . Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте на а) 72° ; б) 90° ?
- **Задача 9.** Сколько существует пятизначных чисел, получаемых из числа 12345 перестановкой цифр и у которых чётные цифры не стоят рядом?
- **Задача 10.** Имеются две шкатулки, в одной из которых лежит ключ. На первой шкатулке написано: «Ключ находится во второй шкатулке». На второй написано: «Одно из двух утверждений, записанных на этих шкатулках, истинно, а второе ложно». В какой из шкатулок находится ключ?
- **Задача 11.** Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так, что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.
- **Задача 12.** Даны три действительных числа: a , b и c . Известно, что $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$, $abc > 0$. Докажите, что $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.
- **Задача 13.** Даны 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их попарных разностей найдутся четыре одинаковых.
- **Задача 14.** Докажите, что простых чисел, дающих остаток 2 при делении на 3, бесконечно много.
- **Задача 15.** Доказать, что существует бесконечно много простых чисел.
- **Задача 16.** Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррационально.
- **Задача 17.** Представьте число 100 в виде суммы чисел, в записи которых встречаются все десять цифр и по одному разу.
- **Задача 18.** Справедливо ли утверждение: Все простые числа нечетны?
- **Задача 19.** Докажите, что из 53 различных натуральных чисел, не превосходящих в сумме 1990, всегда можно выбрать 2 числа, составляющих в сумме 53.
- **Задача 20.** Натуральное число p таково, что $3p + 1$ и $10p + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число $29p + 11$ составное.
- **Задача 21.** Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой - целое число (не равное 0 и -1). Докажите, что сумма любого числа произвольно выбранных ее членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

- *Задача 22.* Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике?
- *Задача 23.* Каждая точка пространства окрашена в один из пяти цветов, причем каждым из этих пяти цветов окрашена хотя бы одна точка. Докажите, что найдется плоскость, все точки которой окрашены не менее, чем в 4 цвета.
- *Задача 24.* Имеется сетка, состоящая из квадратов размером 1×1 . Каждый её узел покрашен в один из четырёх данных цветов так, что вершины любого квадрата 1×1 покрашены в разные цвета. Доказать, что найдётся прямая, принадлежащая сетке, такая, что узлы, лежащие на ней, покрашены в два цвета.
- *Задача 25.* Можно ли бумажный круг с помощью ножниц перекроить в квадрат той же площади? (Разрешается сделать конечное число разрезов по прямым линиям и дугам окружностей).

Тема 4. Принцип Дирихле

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.
- *Задача 2.* В Ярославле живет около 600 тысяч человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее двухсот тысяч волос.
- *Задача 3.* В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.
- *Задача 4.* Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.
- *Задача 5.* Докажите, что в любом классе есть двое, имеющие одинаковое число друзей в этом классе.
- *Задача 6.* Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.
- *Задача 7.* а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке вида из трех полей было по крайней мере одно не закрашенное поле?
б) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке вида было по крайней мере одно черное поле?
- *Задача 8.* 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.
- *Задача 9.* Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
- *Задача 10.* В окно $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$ вставлена решётка, показанная на рис. справа. Внутренний квадрат, образованный прутьями – $0,5 \text{ м} \times 0,5 \text{ м}$. Какое наибольшее число пауков может ужиться на этой решётке, если паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем 51 см? Расстояние измеряется вдоль прутьев.
- *Задача 11.* Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.
- *Задача 12.* В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.



Тема 5. Теория чисел

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Найдите последнюю цифру числа а) $1234567 + 9876543$; б) 13579×8642 , в) 13^5 , г) 7^{19} .
- **Задача 2.** Найдите последнюю цифру числа а) 2^{100} ; б) 2017^{2017} ; в) $123456789^{987654321}$.
- **Задача 3.** В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $25321^{127} - 1$. Не опечатка ли это? (Простое число — это натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя.)
- **Задача 4.** Делится ли число $47^{30} + 39^{50}$ на 10?
- **Задача 5.** В магазин привезли 206 литров молока в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов каждого вида?
- **Задача 6.** Найдите последнюю цифру в произведении: а) всех простых чисел, не превосходящих 1234; б) всех нечетных простых чисел, не превосходящих 1234; в) всех нечетных чисел от 1 до 2017.
- **Задача 7.** Сколькими нулями оканчивается число $2017! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2015 \times 2016 \times 2017$?
- **Задача 8.** Докажите, что среди квадратов любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10.
- **Задача 9.** Найдите последнюю цифру числа а) $(7^7)^7$; б) 7^{7^7} .
- **Задача 10.** Докажите, что если $a > b$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$.
- **Задача 11.** Найдите $\text{НОД}(2015, 1001)$.
- **Задача 12.** Последовательность чисел Фибоначчи задана по следующему правилу: $F_1 = F_2 = 1$, а все последующие числа определяются по правилу $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. (Начало бесконечной последовательности Фибоначчи выглядит так: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, и т.д.) Найдите $\text{НОД}(F_{2015}, F_{2014})$.
- **Задача 13.** Докажите, что если a при делении на b дает остаток r , то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r, b)$.
- **Задача 14.** Найдите $\text{НОД}(747474, 111)$.
- **Задача 15.** На прямой сидит блоха, и прыгает всякий раз либо на 15 сантиметров вправо, либо на 21 сантиметр влево. В каких точках прямой может побывать эта блоха?
- **Задача 16.** Докажите, что
 - а) если m_1 и m_2 линейно представимы через a и b , то $m_1 + m_2$ и $m_1 - m_2$ также линейно представимы через a и b ;
 - б) если m линейно представимо через a и b , то km линейно представимо через a и b для любого целого k ;
 - в) $\text{НОД}(a, b)$ линейно представим через a и b ;
 - г) число m линейно представимо через a и b тогда и только тогда, когда оно делится на $\text{НОД}(a, b)$.
- **Задача 17.** $\text{НОД}(a, b) = d$. Докажите, что $\text{НОД}(2a - 1, 2b - 1) = 2d - 1$.
- **Задача 18.** Найдите $\text{НОД}(235 + 1, 2100 + 1)$.
- **Задача 19.** В государстве имеют хождение монеты достоинством a и b золотых, где a и b — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что:
 - а) покупатель может заплатить в магазине любую сумму в целое число золотых (возможно, получив сдачу), при условии, что и у покупателя, и у продавца имеется достаточно большой запас монет каждого достоинств;
 - б) такими монетами можно набрать (без сдачи) любую сумму, начиная с $2ab$ золотых;
 - в) найдите наибольшее число золотых, которое нельзя набрать такими монетами.
- **Задача 20.** Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. В доме есть лифт с двумя кнопками, одна из которых поднимает лифт на a этажей вверх, а вторая опускает на b этажей вниз, если это возможно (например, на последнем этаже первая кнопка не

работает). Докажите, что на этом лифте можно попасть с любого этажа на любой другой, если высота дома не меньше а) $2ab$; б) $a + b$.

Тема 6. Инвариант

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** На n ёлках сидят n чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров в противоположном направлении.
 - б) При каких n все чижи смогут собраться на одной ёлке?
 - а) Если задача в общем виде не получается, разберите случай $n = 6$.
- **Задача 2.** Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полупроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?
- **Задача 3.** По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?
- **Задача 4.** Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился ноль. С какого числа начинали?
- **Задача 5.** На доске выписаны числа $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b , стираем их и пишем на доску число $a + b + ab$. Такую операцию проделываем до тех пор, пока не останется одно число. Какое число может остаться?
- **Задача 6.** В каждой вершине куба стоит число $+1$ или -1 . В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной нулю?
- **Задача 7.** На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
- **Задача 8.** Можно ли доску размерами $4 \times N$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?
- **Задача 9.** Дан выпуклый $2m$ -угольник $A_1 \dots A_{2m}$. Внутри его взята точка P , не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в точках $A_1, \dots, A_{2m}$.
- **Задача 10.** Лягушка прыгает вдоль прямой: а) на 1 см вправо или влево; б) сначала на 1 см вправо, затем на 3 см вправо или влево, затем на 5 см вправо или влево, и т. д. Может ли она оказаться в исходной точке после своего 101-го прыжка?
- **Задача 11.** а) Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля $A1$ на поле $A8$? б) Тот же вопрос для шахматного коня.
- **Задача 12.** На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 20, 21$. Можно стереть любые два числа a и b и записать число а) $a+b$; б) ab ; в) $a+b-2$. Какое число получится после 20 таких действий? г) Можно стереть любые два числа и записать их разность. Можно ли добиться того, чтобы в результате все числа на доске стали нулями? д) Вопрос пункта г), если написаны натуральные числа от 1 до 23.
- **Задача 13.** а) На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном? б) На доске написаны числа $0, 0, 0$,

1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?
- *Задача 14.* В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли так быть, что из них ровно 19 делятся на три?
- *Задача 15.* а) На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной. б) На шахматной доске 5×5 расставили 25 шашек — по одной на каждой клетке. Потом все шашки сняли с доски, но запомнили, на какой клетке стояла каждая. Можно ли ещё раз расставить шашки на доске таким образом, чтобы каждая шашка стояла на клетке, соседней (по стороне) с той, на которой она стояла в прошлый раз?
- *Задача 16.* Петя ввёл в компьютер число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?
- *Задача 17.* По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными? Подсказка: рассмотрите диаметрально противоположные числа.
- *Задача 18.* В колбу поместили 133 бактерии типа А, 135 бактерий типа В и 137 бактерий типа С. Если две бактерии разных типов соприкасаются, то они обе меняют свой тип на третий. Может ли оказаться, что через некоторое время все бактерии в колбе будут одного типа? Подсказка: подумайте про остатки от деления на 3.

Тема 7. Комбинаторика

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* В школе 350 учеников. Из них 200 занимаются в математическом кружке, 110 — в химическом и 100 ребят не посещают эти кружки. Сколько химиков увлекается математикой?
- *Задача 2.* У двух начинающих коллекционеров по 200 марок и по 105 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?
- *Задача 3.* В цветике-семицветике 7 лепестков разного цвета. Сколько различных цветиков-семицветиков существует?
- *Задача 4.* Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см?
- *Задача 5.* Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?
- *Задача 6.* Доказать, что $3n!/6n \cdot n!$ — натуральное число при любом натуральном n .
- *Задача 7.* На окружности отмечены 48 красных и 74 синих точек. Рассмотрим всевозможные отрезки (хорды) с концами в отмеченных точках. У скольких отрезков концы а) разного цвета; б) одинакового цвета?
- *Задача 8.* Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?
- *Задача 9.* Город Феи Иванова — квадратный и имеет размеры 6×8 км. Дом находится в юго-западном углу, а школа — в северо-восточном. Сколькими способами может Федя добраться до школы, делая шаг величиной в 1 км, если двигаться разрешено только в точности на север или на восток?
- *Задача 10.* Как двум братьям поделить между собой пачку мороженого так, чтобы ни один из них не мог обвинять другого в том, что ему досталось меньше половины всего мороженого. (Чтобы каждый имел возможность получить не меньше половины.)

- *Задача 11.* Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек», чтобы 4 буквы «е» не шли подряд?
- *Задача 12.* В Москве 7 высотных зданий. Если смотреть на них издалека, они в каком-то порядке располагаются на линии горизонта. Если смотреть из разных точек, будут разные способы расстановки. Турист едет по московской кольцевой автодороге и постоянно смотрит на высоты. Увидит ли он все возможные расстановки высоток, когда завершит круг?

Тема 8. Теория графов

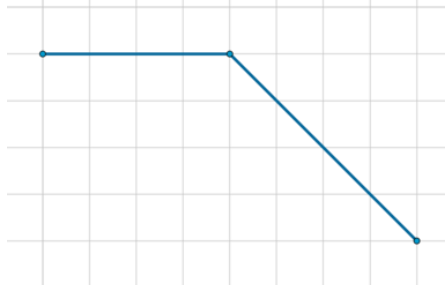
Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Нарисуйте куб, тетраэдр, октаэдр как плоский граф на плоскости.
- *Задача 2.* В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 непересекающимися каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Островом считается часть суши, окруженная водой. Сколько в этой стране островов?
- *Задача 3.* Внутри квадрата отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и вершинами квадрата, так что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?
- *Задача 4.* Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?
- *Задача 5.* Пусть есть планарный граф, в котором N компонент связности. Как изменится для него формула Эйлера?
- *Задача 6.* Докажите, что полный граф на пяти вершинах не планарен.
- *Задача 7.* Докажите, что любой многогранник можно представить в виде плоского графа.
- *Задача 8.* Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?
- *Задача 9.* В стране 2011 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?
- *Задача 10.* В классе 20 человек. Из них все, кроме Пети дружат ровно с 5 одноклассниками. Может ли Петя ни с кем не дружить?
- *Задача 11.* Может ли в стране, где из каждого города выходит по три дороги и нет развилок и тупиков, быть ровно 100 дорог?
- *Задача 12.* Иван утверждает, что среди любых а) четырёх; б) пяти; в) шести человек обязательно найдётся либо трое знакомых друг с другом, либо трое незнакомых. Не завирается ли он?
- *Задача 13.* Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
- *Задача 14.* В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире, и сколько партий сыграл выбывший участник?
- *Задача 15.* В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединён авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?
- *Задача 16.* В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что можно закрыть какой-то один вид транспорта так, чтобы из любого города можно было проехать в любой другой (возможно, с пересадками).

Тема 9. Геометрия

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Постройте отрезок, длина которого равна: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{13}$.
- *Задача 2.* На клетчатой бумаге изображен угол. Найдите его градусную величину.



- *Задача 3.* Саша сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рисунок) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Саша предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Саша?

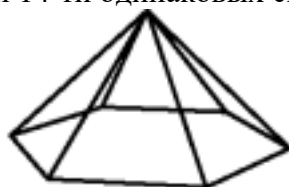
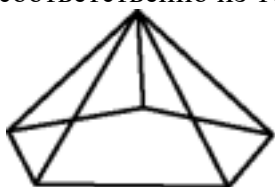
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

- *Задача 4.* Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратах 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.
- *Задача 5.* Дан прямоугольник 100×101 , разбитый линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ.
- *Задача 6.* В узлах клетчатой плоскости отмечено 5 точек. Доказать, что есть две из них, середина отрезка между которыми тоже попадает в узел.
- *Задача 7.* На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4 . Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.
- *Задача 8.* На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4 . Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.
- *Задача 9.* а) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 8×2 на прямоугольники 1×2 ? б) Придумайте и опишите фигуру, которую можно разрезать на прямоугольники 1×2 ровно 555 способами.
- *Задача 10.* Даны сто рисунков:



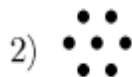
Сколько всего точек на них изображено?

- *Задача 11.* С помощью сломанного циркуля, у которого не меняется раствор, начерчена окружность. Найдите её центр, пользуясь только этим циркулем.
- *Задача 12.* Все вершины пятиугольника, каждая сторона которого меньше 1 мм, лежат на одной окружности. Обязательно ли эту окружность можно начертить с помощью циркуля, раствор которого можно менять от 0 до 20 см?
- *Задача 13.* а) Сложите 4 треугольника, используя 6 одинаковых спичек. б) Добавьте ещё 3 такие же спички, чтобы образовалось ещё 3 треугольника.
- *Задача 14.* Можно ли изображённые на рисунке три пирамидки сложить соответственно из 10-ти, 12-ти и 14-ти одинаковых спичек?

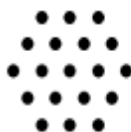


- *Задача 15.* Даны сто гексов:

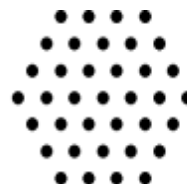
1) •



3)



4)



и т. д.

Сколько всего точек во всех ста гексах?

- *Задача 16.* Найдите $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = ?$ и докажите, используя листок в клетку.

Тема 1. Математическая логика

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. На его сторонах построены внешним образом правильные треугольники ABC, BCA, и CAB. Докажите, что треугольник ABC не может быть правильным.
- *Задача 2.* Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы прилегают к одной стороне пятиугольника.
- *Задача 3.* Дан выпуклый многоугольник и точка O внутри него. Любая прямая, проходящая через точку O, делит площадь многоугольника пополам. Доказать, что многоугольник центрально-симметричный и O - центр симметрии.
- *Задача 4.* Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?
- *Задача 5.* Существует ли тетраэдр, все грани которого равнобедренные треугольники, причём никакие два из них не равны?
- *Задача 6.* Любой ли трехгранный угол можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится правильный треугольник?
- *Задача 7.* Докажите, что в кубе можно проделать отверстие, через которое можно протащить куб таких же размеров.
- *Задача 8.* В сундуке лежали два колпака белого цвета и три черного. В темную комнату завели трех мудрецов и надели на них какие-то колпаки из сундука. Потом вывели в другую комнату. Они не видят, какого цвета колпак на них, но видят колпаки других. Через некоторое время один из них догадался, какого цвета на нем колпак. Как? Какого цвета был колпак?
- *Задача 9.* Шесть на два. Восстановите числовой пример на деление

ш	е	с	т	ь		д	в	а
т	и	с				т	р	и
	а	в	т					
	р	ь	е					
		и	е	ь				
		и	е	ь				
				0				

- *Задача 10.* ABCDEF – число из шести цифр. Все они разные и расположены слева направо в возрастающем порядке. Число это – полный квадрат. Определите, какое это число.
- *Задача 11.* Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка – белого или чёрного?
- *Задача 12.* Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

Встречай завтра поезд СТО вагон О

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли еще две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

СЕКРЕТ – ОТКРОЙ = ОТВЕТ – ТВОЙ

СЕКРЕТ – ОТКРЫТ = 20010

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул:

– Теперь ясно, какой поезд надо встречать!

Инспектор удивился.

– Элементарно, Лестрейд! – пояснил сыщик. – Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные – разные, а черточка – это минус! Мориарти едет в поезде номер ...

Напишите номер поезда и вагона.

- *Задача 13.* Пол комнаты площадью 6 м^2 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м^2 . Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2 .
- *Задача 14.* Сколько существует целых чисел от 1 до 33000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?
- *Задача 15.* Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?
- *Задача 16.* Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?
- *Задача 17.* Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?
- *Задача 18.* В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на своё место?
- *Задача 19.* Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.
- *Задача 20.* Дима провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что: 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Дима узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врёт ли управдом?
- *Задача 21.* Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через A) записана единица. Через кубик A проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.
- *Задача 22.* На доске нарисованы три четырёхугольника. Петя сказал: "На доске нарисованы по крайней мере две трапеции". Вася сказал: "На доске нарисованы по крайней мере два прямоугольника". Коля сказал: "На доске нарисованы по крайней мере два ромба". Известно, что один из мальчиков сказал неправду, а двое других – правду. Докажите, что среди нарисованных на доске четырёхугольников есть квадрат.

- **Задача 23.** 30 девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих платьях – водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?
- **Задача 24.** Текст МИМОПРАСТЕТИРАСИСПДАИСАФЕИИБОЕТКЖРГЛЕОЛОИШИШАННСЙСАООЛТЛЕЯТУИЦВЫИПИЯДПИЩПЬПСЕЮЯЯ получен из исходного сообщения перестановкой его букв. Текст УЩФМШПДРЕЦЧЕШЮШЧДАКЕЧМДВКШБЕЕЧДФЭПЙЩГШФЩЦЕЮЩФПМЕЧПМЕРЩМЕОФЧЩХЕШРТГДИФРСЯЫЛКДФФЕЕ получен из того же исходного сообщения заменой каждой буквы на другую букву так, что разные буквы заменены разными, а одинаковые - одинаковыми. Восстановите исходное сообщение.
- **Задача 25.** Дана криптограмма:

$$\begin{array}{rclcl}
 \Phi\text{Н} & \times & \text{Ы} & = & \Phi\text{А}\Phi \\
 + & & \times & & - \\
 \text{ЕЕ} & + & \text{Е} & = & \text{НЗ} \\
 = & & = & & = \\
 \bullet & \text{ИША} & + & \text{МР} & = & \text{ИМН}
 \end{array}$$

- Восстановите цифровые значения букв, при которых справедливы все указанные равенства, если разным буквам соответствуют различные цифры. Расставьте буквы в порядке возрастания их цифровых значений и получите искомый текст.

Тема 2. Принцип математической индукции

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объясните.
- **Задача 2.** Докажите тождество: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- **Задача 3.** Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.
- **Задача 4.** Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?
- **Задача 5.** Найдите все натуральные n , для которых $2n \leq n^2$.
- **Задача 6.** Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n: (n + 1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?
- **Задача 7.** n человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом n .
- **Задача 8.** На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)
- **Задача 9.** Найдите $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = ?$ и докажите.
- **Задача 10.** n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $1/n$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

- *Задача 11.* В клетчатом квадрате 64×64 вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть квадрата можно разрезать на уголки из трех клеток.

Тема 3. Теория чисел

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Что можно точно утверждать про натуральное число n , если известно, что $105n$ кратно 30: а) n кратно 2; б) n кратно 6; в) n кратно 30?
- *Задача 2.* Для каждого натурального n через $\varphi(n)$ обозначим количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Найти а) $\varphi(p)$; б) $\varphi(p^2)$, где p простое; в) $\varphi(1024)$. г) Функция φ возрастает?
- *Задача 3.* Доказать, что натуральное число имеет нечётное число делителей тогда и только тогда, когда оно является полным квадратом.
- *Задача 4.* Про рациональное число x известно, что $x + 1/x$ — натуральное число. Доказать, что $x = 1$.
- *Задача 5.* Про целые числа m и n известно, что $m^2 + n^2$ кратно 3. Доказать, что m и n кратны 3.
- *Задача 6.* Квадрат натурального числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими?
- *Задача 7.* Найти все натуральные n , при которых $3^n + 1$ кратно 2^n .

Тема 4. Инвариант

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?
- *Задача 2.* На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?
- *Задача 3.* Круг разделён радиусами на 6 равных секторов. В каждом секторе стоит фишка. Разрешается одновременно перемещать две любые фишки в соседние сектора: одну по часовой стрелке, а другую — против. Можно ли таким образом собрать все фишки в одном секторе?
- *Задача 4.* На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке? А если чижей и ёлок семь?
- *Задача 5.* На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая ее по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но а) рубашкой вверх; б) рубашкой вниз и вверх ногами?
- *Задача 6.* На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
- *Задача 7.* В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: А (20 штук), В (21 штука) и С (22 штуки). Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких слияний в пробирке осталась одна амёба. Каков её тип?
- *Задача 8.* В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

- **Задача 9.** Если к числу 100 применить 99 раз операцию взятия факториала, получится число X. Если к числу 99 применить 100 раз операцию взятия факториала, получится число Y. Какое из этих двух чисел больше?

Тема 5. Оптимизация

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\sqrt{3}/4$.
- **Задача 2.** На плоскости даны 2007 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся а) треугольник с вершинами в этих точках, не содержащий ни одной из оставшихся точек; б) окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.
- **Задача 3.** Докажите, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне (а не на её продолжении).
- **Задача 4.** а) На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что хотя бы одна из них бьёт не более двух других. б) На шахматной доске стоят несколько ферзей. Докажите, что какой-то из этих ферзей бьёт не более четырёх других. в) Всегда ли верно, что какой-то из ферзей бьёт не более трёх других?
- **Задача 5.** Путешественник выходит из своего родного города и отправляется в самый дальний от него город страны, затем — в город, самый дальний от этого города, и так далее. Расстояния между всеми городами различны. Докажите, что если путешественник не вернулся в родной город после второго перехода, то он никогда в него не вернётся.
- **Задача 6.** Можно ли на плоскости расположить 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?
- **Задача 7.** Докажите, что простых чисел бесконечно много.
- **Задача 8.** В парламенте у каждого не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.
- **Задача 9.** Имеются два бикфордовых шнура. Шнуры при поджигании горят неравномерно, но каждый полностью сгорает за одну минуту. Как с помощью этих шнуров отмерить а) 30 секунд; б) 45 секунд?

Тема 6. Текстовые задачи

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья — четвёрки, половина — тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?
- **Задача 2.** Сколько фунтов зерна нужно смолоть, чтобы после оплаты работы — 10% от помола, осталось ровно 100 фунтов муки? Потерь при помоле нет.
- **Задача 3.** В тесте к каждому вопросу указаны пять вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $1/5$ часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?
- **Задача 4.** На острове $2/3$ всех мужчин женаты и $3/5$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?
- **Задача 5.** По данным опроса, проведенного в 7 "Е" классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только

Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 "Е", если известно, что их больше 20, но меньше 30?

- **Задача 6.** В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья – четвёрки, половина – тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?
- **Задача 7.** Сколько фунтов зерна нужно смолотить, чтобы после оплаты работы – 10% от помола, осталось ровно 100 фунтов муки? Потерь при помоле нет.
- **Задача 8.** В тесте к каждому вопросу указаны пять вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удастся списать, он отвечает правильно, а в противном случае – наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $\frac{1}{5}$ часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Тема 7. Нестандартные уравнения и неравенства

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше 4.
- **Задача 2.** Докажите, что $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ при любых x и y .
- **Задача 3.** $a + b = 1$. Каково максимальное значение величины ab ?
- **Задача 4.** Рассматриваются такие наборы действительных чисел $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}\}$, заключённых между 0 и 1, что $x_1 x_2 x_3 \dots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \dots (1 - x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой набор, для которого значение $x_1 x_2 x_3 \dots x_{20}$ максимально.
- **Задача 5.** Докажите, что если $a > 0, b > 0, c > 0$ и $ab + bc + ca \geq 12$, то $a + b + c \geq 6$.
- **Задача 6.** $a, b, c \geq 0$. Докажите, что $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$.
- **Задача 7.** Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.
- **Задача 8.** Доказать неравенство
- $$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \dots + x_{1987} \cdot x_{1988} + x_{1988} \cdot x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1988}^2$$
- **Задача 9.** При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь?
- **Задача 10.** Докажите, что для положительных значений a, b и c выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Тема 8. Квадратный трехчлен

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, а p и q – простые числа. Найдите p и q .
- **Задача 2.** Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Выразите через p и q следующие выражения:

$$\text{а) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad \text{б) } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}; \quad \text{в) } x_1^3 + x_2^3; \quad \text{г) } \frac{1}{(x_1 + p)^2} + \frac{1}{(x_2 + p)^2}.$$

- **Задача 3.** Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Напишите уравнение, корнями которого будут числа y_1, y_2 равные:

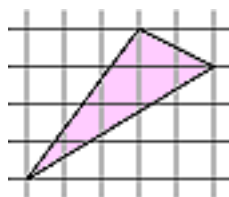
$$\text{а) } x_1^3, x_2^3; \quad \text{б) } \frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}; \quad \text{в) } x_1 + \frac{1}{x_2}, x_2 + \frac{1}{x_1}; \quad \text{г) } \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}.$$

- **Задача 4.** На параболе $y = x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.
- **Задача 5.** Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом – два отрицательных?
- **Задача 6.** Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.
- **Задача 7.** У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.
- **Задача 8.** У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни – целые числа?
- **Задача 9.** Один из двух приведённых квадратных трёхчленов имеет два корня, меньших 1000, другой – два корня, больших 1000. Может ли сумма этих трёхчленов иметь один корень меньший 1000, а другой – больший 1000?
- **Задача 10.** Найдите все такие пары квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, что a и b – корни второго трёхчлена, c и d – корни первого.
- **Задача 11.** Корни двух приведённых квадратных трёхчленов – отрицательные целые числа, причём один из этих корней – общий. Могут ли значения этих трёхчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?
- **Задача 12.** Могут ли все корни уравнений $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - (p + 1)x + q = 0$ оказаться целыми числами, если: а) $q > 0$; б) $q < 0$?

Тема 9. Геометрия

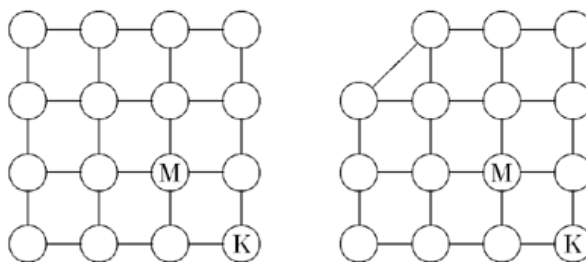
Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** а) Докажите, что медиана делит треугольник на две равновеликие части. б) докажите, что три медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.
- **Задача 2.** а) В треугольнике ABC точка C1 лежит на стороне AB, точка K — на отрезке CC1. Докажите, что $S_{ACK}/S_{BCK} = AC1/C1B$. б) Теорема Чевы. Три точки A1, B1 и C1 выбраны на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC так, что отрезки AA1, BB1 и CC1 пересекаются в одной точке. Доказать, что $(AC1/C1B) \cdot (BA1/A1C) \cdot (CB1/C1A) = 1$.
- **Задача 3.** Диагонали четырёхугольника ABCD пересекаются в точке O. Докажите, что $SAOB \cdot SCOD = SBOC \cdot SDOA$.
- **Задача 4.** Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника до его сторон не зависит от положения этой точки.
- **Задача 5.** Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей диагонали.
- **Задача 6.** Найдите площадь треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге. Площадь одной клетки равна 1.



- **Задача 7.** Могут ли длины высот треугольника равняться 1, 2 и 3?
- **Задача 8.** Длины сторон треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1?

- *Задача 9.* Кошка бегает за мышкой по доске, изображённой на а) первом; б) втором рисунке. За один ход можно перейти в соседнее поле (по нарисованному отрезку). Начинает кошка. Кошка съедает мышку, если оказывается с ней в одном месте. Удается ли ей это?



- *Задача 10.* Разрежьте квадрат со стороной 5 на несколько частей, из которых можно сложить два квадрата со сторонами 3 и 4.
- *Задача 11.* Постройте параллелограмм по высоте, основанию и углу между диагоналями.
- *Задача 12.* Постройте треугольник по трём медианам.
- *Задача 13.* В квадрате отметили по точке на каждой стороне, а сам квадрат стёрли. Восстановите его.
- *Задача 14.* В треугольнике отметили середины сторон, а сам треугольник стёрли. Восстановите его.
- *Задача 15.* Через данную точку на стороне треугольника проведите прямую, делящую площадь треугольника пополам.
- *Задача 16.* Внутри треугольника ABC найдите такую точку М, что $S_{AMB} : S_{BMC} : S_{CMD} = 1 : 2 : 3$.
- *Задача 17.* а) Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. б) На плоскости нарисованы две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Имея только линейку, найдите середину отрезка. (Замечание. С помощью линейки можно проводить прямую через любые две имеющиеся точки. Никакие другие операции невозможны. «Делений» на линейке нет!)
- *Задача 18.* Число $a + (1/a)$ целое. Докажите, что $a^2 + (1/a^2)$ тоже целое.
- *Задача 19.* Найдите все натуральные числа n такие, что числа n , $n + 2$ и $n + 4$ — простые.

3-ий год обучения

Тема 2. Геометрия

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AE , ED , BF и FC , если известно, что площадь $ABCD$ равна S .
- *Задача 2.* Многоугольник описан около окружности радиуса r . Докажите, что его площадь равна pr , где p — полупериметр многоугольника.
- *Задача 3.* Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.
- *Задача 4.* Пусть A_1 , B_1 , C_1 и D_1 — середины сторон CD , DA , AB , BC квадрата $ABCD$, площадь которого равна S . Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 .
- *Задача 5.* Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.
- *Задача 6.* Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.
- *Задача 7.* Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A , B , C и D проведены прямые, параллельные прямой MC , MD , MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.
- *Задача 8.* Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.
- *Задача 9.* Ось симметрии многоугольника пересекает его стороны в точках A и B . Докажите, что точка A является либо вершиной многоугольника, либо серединой стороны, перпендикулярной оси симметрии.
- *Задача 10.* Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C .
- *Задача 11.* Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.
- *Задача 12.* На плоскости даны точки A и B и прямая l . По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC , если точка C движется по прямой l ?
- *Задача 13.* Две окружности касаются в точке K . Прямая, проходящая через точку K , пересекает эти окружности в точках A и B . Докажите, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B , параллельны.
- *Задача 14.* Докажите, что если углы выпуклого пятиугольника образуют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше 36° .
- *Задача 15.* Докажите, что в треугольнике угол A острый тогда и только тогда, когда $\tan A > a/2$.
- *Задача 16.* Докажите, что площадь S треугольника равна $abc/4R$.

Тема 3. Математические доказательства

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Докажите тождество: $12 + 22 + \dots + n^2 = 1/6 n(n+1)(2n+1)$.
- *Задача 2.* На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.
- *Задача 3.* В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причём отрезки не пересекаются друг с другом. Первый игрок красит каждый отрезок в один из k цветов, затем второй игрок красит в один из тех же цветов каждую точку. Если найдутся две точки и отрезок между ними, окрашенные в один цвет, выигрывает

первый игрок, в противном случае второй. Докажите, что первый может гарантировать себе выигрыш, если а) $k = 7$; б) $k = 10$.

- **Задача 4.** На олимпиаду пришло 2018 участников, некоторые из них знакомы между собой. Будем говорить, что несколько попарно знакомых участников образуют "кружок", если любой другой участник олимпиады незнаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой аудитории не будут сидеть все представители какого-либо "кружка".
- **Задача 5.** На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n - 2$ гвоздями.
- **Задача 6.** Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков. Первый разрез проведён параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведён в оставшейся части от края до края перпендикулярно предыдущему разрезу, далее аналогично (сколько-то раз). Все отрезанные куски имеют равную площадь. Может ли оставшаяся часть торта быть квадратом?
- **Задача 7.** Число 76 обладает таким любопытным свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ – это снова 76. а) Есть ли ещё такие двузначные числа? б) Найдите все такие трёхзначные числа A , что последние три цифры числа A^2 составляют число A . в) Существует ли такая бесконечная последовательность цифр $a_1, a_2, a_3, \dots$, что для любого натурального n квадрат числа $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ оканчивается на эти же n цифр? Очевидный ответ $a_1 = 1$ и $0 = a_2 = a_3 = \dots$ мы исключаем.
- **Задача 8.** В воздушном пространстве находятся облака. Оказалось, что пространство можно разбить десятью плоскостями на части так, чтобы в каждой из частей находилось не более одного облака. Через какое наибольшее число облаков мог пролететь самолет, придерживаясь прямолинейного курса?
- **Задача 9.** Шарообразная планета окружена 25 точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдётся точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 11 астероидов.
- **Задача 10.** а) В квадрате площади 6 расположены три многоугольника площади 3. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1. б) В квадрате площади 5 расположено девять многоугольников площади 1. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше $1/9$.
- **Задача 11.** Имеется 101 натуральное число, причем сумма этих чисел равна 200. Докажите, что из этих чисел всегда можно выбрать несколько чисел, дающих в сумме 100.
- **Задача 12.** В составлении 40 задач приняло участие 30 студентов со всех пяти курсов. Каждые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Каждые два студента с разных курсов придумали разное число задач. Сколько человек придумало ровно по одной задаче?
- **Задача 13.** На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.
- **Задача 14.** На тарелке лежат 9 кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?
- **Задача 15.** 25 дачников получили садовые участки. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1 , и все участки вместе составляют квадрат 5×5 . Каждый дачник враждует не более, чем с тремя другими дачниками. Докажите, что можно

распределить участки таким образом, чтобы участки враждующих дачников не были соседними (по стороне).

- **Задача 16.** Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

Тема 4. Многочлены

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $x - 1$?
- **Задача 2.** При каком значении a многочлен $P(x) = x^{1000} + ax^2 + 9$ делится на $x + 1$?
- **Задача 3.** Докажите, что многочлен $P(x) = (x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.
- **Задача 4.** Пусть $P(xn)$ делится на $x - 1$. Докажите, что $P(xn)$ делится на $xn - 1$.
- **Задача 5.** Доказать, что если p/q – несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома $f(x)$ с целыми коэффициентами, то $p - kq$ есть делитель числа $f(k)$ при любом целом k .
- **Задача 6.** Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2011. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?
- **Задача 7.** При каких a уравнение а) $ax^2 + (a + 1)x - 2 = 0$; б) $(1 - a)x^2 + (a + 1)x - 2 = 0$ имеет два различных корня?
- **Задача 8.** Может ли вершина параболы $y = 4x^2 - 4(a + 1)x + a$ лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении a ?
- **Задача 9.** Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.
- **Задача 10.** Существует ли квадратный трёхчлен, который при $x = 2014, 2015, 2016$ принимает значения 2015, 0, 2015 соответственно?
- **Задача 11.** Известно, что $b - c > a$ и $a \neq 0$. Обязательно ли уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?
- **Задача 12.** На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству $x^2y - y \geq 0$.
- **Задача 13.** Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, а p и q – простые числа. Найдите p и q .
- **Задача 14.** На параболе $y = x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D , если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.
- **Задача 15.** Квадратный трёхчлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет два различных корня, а квадратный трёхчлен $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ корней не имеет. Докажите, что у первого трёхчлена корни разного знака.
- **Задача 16.** Даны различные действительные числа a, b, c . Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x - a)(x - b) = x - c$, $(x - b)(x - c) = x - a$, $(x - c)(x - a) = x - b$ имеют решение.
- **Задача 17.** Пусть $P(x)$ – многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.
- **Задача 18.** При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма? (Корни рассматриваются с учётом кратности.)
- **Задача 19.** Квадратные трёхчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.
- **Задача 20.** Выразите через элементарные симметрические многочлены следующие выражения: а) $(x + y)(y + z)(x + z)$; б) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; в) $x^3 + y^3$; г) $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(x^2 + z^2)$.
- **Задача 21.** Выразите через a и b действительный корень уравнения $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx = 0$. Найдите представления для двух комплексных корней этого уравнения.

- **Задача 22.** Докажите, что график многочлена а) $x^3 + px$; б) $x^3 + px + q$; в) $ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет центр симметрии.
- **Задача 23.** Найдите зависимость между коэффициентами кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, если известно, что сумма двух его корней равна произведению этих корней.

Тема 5. Метод «оценка + пример»

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Куб с ребром $2n + 1$ разрезают на кубики с ребром 1 и бруски размера $2 \times 2 \times 1$. Какое наименьшее количество единичных кубиков может при этом получиться?
- **Задача 2.** В театральной труппе 60 актеров. Каждый два хотя бы раз играли в одном и том же спектакле. В каждом спектакле занято не более 30 актеров. Какое наименьшее количество спектаклей мог поставить театр?
- **Задача 3.** Какое максимальное число дамок можно поставить на чёрных полях шахматной доски размером 8×8 так, чтобы каждую дамку била хотя бы одна из остальных?
- **Задача 4.** Имеется $2k + 1$ карточек, пронумерованных числами от 1 до $2k + 1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлечённых номеров не был равен сумме двух других извлечённых номеров?
- **Задача 5.** Мишень представляет собой треугольник, разбитый тремя семействами параллельных прямых на 100 равных правильных треугольников с единичными сторонами. Снайпер стреляет по мишени. Он целится в треугольник и попадает либо в него, либо в один из соседних с ним по стороне. Он видит результаты своей стрельбы и может выбирать, когда стрельбу заканчивать. Какое наибольшее число треугольников он может с гарантией поразить ровно пять раз?
- **Задача 6.** На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них – натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?

Тема 6. Игры, турниры и логические задачи

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Мудрецу С. сообщили сумму трёх натуральных чисел, а мудрецу П. – их произведение.
– Если бы я знал, – сказал С., – что твоё число больше, чем моё, я бы сразу назвал три искомых числа.
– Мое число меньше, чем твоё, – ответил П., – а искомые числа ..., ... и
Какие числа назвал П.?
- **Задача 2.** За круглым столом сидят 30 человек – рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причём у рыцаря этот друг – лжец, а у лжеца этот друг – рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос "Сидит ли рядом с вами ваш друг?" сидевшие через одного ответили "Да". Сколько из остальных могли также ответить "Да"?
- **Задача 3.** Цифры 0, 1, ..., 9 разбиты на несколько непересекающихся групп. Из цифр каждой группы составляются всевозможные числа, для записи каждого из которых все цифры группы используются ровно один раз (учитываются и записи, начинающиеся с нуля). Все полученные числа расположили в порядке возрастания и k -му числу поставили в соответствие k -ю букву алфавита АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ. Оказалось, что каждой букве соответствует число и каждому числу соответствует некоторая буква. Шифрование сообщения осуществляется заменой каждой буквы соответствующим ей числом. Если ненулевое число начинается с нуля, то при шифровании этот ноль не выписывается. Восстановите сообщение 873146507381 и укажите таблицу замены букв числами.

- *Задача 4.* За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них – либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: "Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей". После этого k из сидящих сказали: "Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей". При каком наибольшем k это могло случиться?
- *Задача 5.* Саша и Маша загадали по натуральному числу и сообщили их Васе. Вася написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом – их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нём оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?
- *Задача 6.* Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратики и раскрасил их в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратики. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка – белого или чёрного?
- *Задача 7.* В зоопарке жили 200 попугаев. Однажды они по очереди сделали по одному заявлению. Начиная со второго, все заявления были "Среди сделанных ранее заявлений ложных – более 70%". Сколько всего ложных заявлений сделали попугаи?
- *Задача 8.* Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек – белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.
- *Задача 9.* В городе Удоеве выборы мэра проходят следующим образом. Если в очередном туре голосования никто из кандидатов не набрал больше половины голосов, то проводится следующий тур с участием всех кандидатов, кроме последнего по числу голосов. (Никогда два кандидата не набирают голосов поровну; если кандидат набрал больше половины голосов, то он становится мэром и выборы заканчиваются.) Каждый избиратель в каждом туре голосует за одного из кандидатов. Если это кандидат вышел в следующий тур, то избиратель снова голосует за него. Если же кандидат выбыл, то все его избиратели голосуют за одного и того же кандидата из числа оставшихся. На очередных выборах баллотировалось 2002 кандидата. Мэром стал Остап Бендер, занявший в первом туре k -е место по числу голосов. Определите наибольшее возможное значение k , если Остап Бендер был избран а) в 1002-м туре; б) в 1001-м туре.
- *Задача 10.* В строку в неизвестном порядке записаны все целые числа от 1 до 100. За один вопрос про любые 50 чисел можно узнать, в каком порядке относительно друг друга записаны эти 50 чисел. За какое наименьшее число вопросов наверняка можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел?
- *Задача 11.* За круглым столом сидит компания из тридцати человек. Каждый из них либо дурак, либо умный. Всех сидящих спрашивают: Кто Ваш сосед справа – умный или дурак? В ответ умный говорит правду, а дурак может сказать как правду, так и ложь. Известно, что количество дураков не превосходит F . При каком наибольшем значении F всегда можно, зная эти ответы, указать на умного человека в этой компании?

- *Задача 12.* На плоскости расположены 100 точек-овец и одна точка-волк. За один ход волк передвигается на расстояние не больше 1, после этого одна из овец передвигается на расстояние не больше 1, после этого снова ходит волк и т.д. При любом ли начальном расположении точек волк сможет поймать одну из овец?
- *Задача 13.* В одной куче 18 конфет, а в другой – 23. Двое играют в игру: одним ходом можно съесть одну кучу конфет, а другую разделить на две кучи. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход, то есть перед ходом которого имеются две кучи из одной конфеты. Кто выиграет при правильной игре?
- *Задача 14.* Король стоит на поле a1 шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на клетку h8. Кто выигрывает при правильной игре?
- *Задача 15.* Белая ладья преследует чёрного коня на доске 3×1969 клеток (они ходят по очереди по обычным правилам). Как должна играть ладья, чтобы взять коня? Первый ход делают белые.
- *Задача 16.* Двое играющих по очереди увеличивают натуральное число так, чтобы при каждом увеличении разность между новым и старым значениями числа была бы больше нуля, но меньше старого значения. Начальное значение числа равно 2. Выигравшим считается тот, в результате хода которого получится 1987. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?
- *Задача 17.* Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль.

Тема 7. Комбинаторика

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- *Задача 1.* Количество перестановок множества из n элементов обозначается P_n . Докажите равенство $P_n = n!$
- *Задача 2.* Ключом шифра, называемого "поворотная решетка", является трафарет, изготовленный из квадратного листа клетчатой бумаги размера $n \times n$ (n чётно). Некоторые из клеток вырезаются. Одна из сторон трафарета помечена. При наложении этого трафарета на чистый лист бумаги четырьмя возможными способами (помеченной стороной вверх, вправо, вниз, влево) его вырезы полностью покрывают всю площадь квадрата, причём каждая клетка оказывается под вырезом ровно один раз. Буквы сообщения, имеющего длину n^2 , последовательно вписываются в вырезы трафарета, сначала наложенного на чистый лист бумаги помеченной стороной вверх. После заполнения всех вырезов трафарета буквами сообщения трафарет располагается в следующем положении и т. д. После снятия трафарета на листе бумаги оказывается зашифрованное сообщение. Найдите число различных ключей для произвольного чётного числа n .
- *Задача 3.* На плоскости дано n прямых общего положения. Чему равно число образованных ими треугольников?
- *Задача 4.* Почему равенства $11^2 = 121$ и $11^3 = 1331$ похожи на строчки треугольника Паскаля? Чему равно 11^4 ?
- *Задача 5.* Для зашифровки телеграфных сообщений требуется разбить всевозможные десятизначные "слова" – наборы из десяти точек и тире – на две группы так, чтобы каждые два слова одной группы отличались не менее чем в трёх разрядах. Указать способ такого разбиения или доказать, что его не существует.
- *Задача 6.* 30 человек голосуют по пяти предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?
- *Задача 7.* У Сережи и у Лены есть несколько шоколадок, каждая весом не более 100 граммов. Как бы они ни поделили эти шоколадки, у одного из них суммарный вес

шоколадок не будет превосходить 100 граммов. Какой наибольший суммарный вес могут иметь все шоколадки?

- **Задача 8.** Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?
- **Задача 9.** В столовой предложено на выбор шесть блюд. Каждый день Вася берёт некоторый набор блюд (возможно, не берет ни одного блюда), причём этот набор блюд должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней Вася сможет питаться по таким правилам и какое количество блюд он в среднем при этом будет съедать за день?
- **Задача 10.** Пусть M – конечное множество чисел. Известно, что среди любых трёх его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?
- **Задача 11.** На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?
- **Задача 12.** Жили-были двадцать шпионов. Каждый из них написал донос на десять своих коллег. Докажите, что не менее, чем десять пар шпионов донесли друг на друга.
- **Задача 13.** N точек соединены отрезками так, что каждая точка с чем-нибудь соединена и нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Доказать, что общее число отрезков равно $n-1$.
- **Задача 14.** В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро – братья.
- **Задача 15.** В стране n городов. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, из этих двух авиакомпаний хотя бы одна такова, что из любого города можно попасть в любой другой рейсами только этой авиакомпании.
- **Задача 16.** Докажите, что если p – простое число, то $(a + b)^p - a^p - b^p$ делится на p при любых целых a и b.
- **Задача 17.** В строку выписаны 40 знаков: 20 крестиков и 20 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно добиться того, чтобы какие-то 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками?
- **Задача 18.** На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?
- **Задача 19.** Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдётся остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки.
- **Задача 20.** За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка, и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)?

Тема 8. Текстовые задачи

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Для сборки автомобиля Лёше потребовалось купить несколько винтиков и шпунтиков. Когда он подошёл к кассе, выяснилось, что в этот день магазин проводит рекламную акцию, предлагая покупателям или 15-процентную скидку на всю покупку или 50-процентную скидку на шпунтики. Оказалось, что стоимость покупки со скидкой

не зависит от выбранного варианта скидки. Сколько денег Лёша первоначально собирался потратить на покупку шпунтиков, если на покупку винтиков он собирался потратить 7 рублей?

- **Задача 2.** Поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найти длину и скорость поезда.
- **Задача 3.** Для игры в "Морской бой" на поле 8×8 клеток расставили 12 "двухпалубных" кораблей. Обязательно ли останется место для "трёхпалубного" корабля? ("Двухпалубный" корабль – прямоугольник 1×2 , а "трёхпалубный" – 1×3 . Корабли могут соприкасаться, но накладываться друг на друга не должны.)
- **Задача 4.** На некоторые клетки квадратной доски 4×4 выкладывают стопкой золотые монеты, а на остальные клетки – серебряные. Можно ли положить монеты так, чтобы в каждом квадрате 3×3 серебряных монет было больше, чем золотых, а на всей доске золотых было больше, чем серебряных?
- **Задача 5.** Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?
- **Задача 6.** В формулу линейной функции $y = kx + b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.
- **Задача 7.** Можно ли в клетки таблицы размером 4×4 вписать по целому числу так, чтобы сумма всех чисел таблицы была положительной, а сумма чисел в каждом квадрате размера 3×3 была отрицательной?
- **Задача 8.** Дана таблица размером 8×8 , изображающая шахматную доску. За каждый шаг разрешается поменять местами любые два столбца или любые две строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина – чёрной?
- **Задача 9.** Автобус, едущий по маршруту длиной 100 км, снабжен компьютером, показывающим прогноз времени, остающегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автобуса на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя 40 минут после начала движения ожидаемое время до прибытия составляло 1 час и оставалось таким же ещё в течение пяти часов. Могло ли такое быть? Если да, то сколько километров проехал автобус к окончанию этих пяти часов?
- **Задача 10.** Два человека А и В должны попасть как можно скорее из пункта М в пункт N, расположенный в 15 км от М. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/ч. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/ч. А отправляется в путь пешком, а В едет на велосипеде до встречи с пешеходом С, идущим из N и М. Дальше В идёт пешком, а С едет на велосипеде до встречи с А и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N. Когда должен выйти из N пешеход С, чтобы время, затраченное А и В на дорогу в N, было наименьшим? (С идёт пешком с той же скоростью, что А и В; время, затраченное на дорогу, считается от момента выхода А и В из М до момента прибытия последнего из них в N.)
- **Задача 11.** Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.
- **Задача 12.** За некоторое время мальчик проехал на велосипеде целое число раз по периметру квадратной школы в одном направлении с постоянной по величине скоростью 10 км/ч. В это же время по периметру школы прогуливался его папа со скоростью 5 км/ч, при этом он мог менять направление движения. Папа видел мальчика

в те и только те моменты, когда они находились на одной стороне школы. Мог ли папа видеть мальчика больше половины указанного времени?

- **Задача 13.** Несколько человек в течение t минут наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти t минут?
- **Задача 14.** По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.
- **Задача 15.** Полицейский участок расположен на прямой дороге, бесконечной в обе стороны. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали вдогонку полицейского на новой полицейской машине. Однако вот беда: полицейский не знал, никогда машина была угнана, ни в каком направлении вдоль дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?
- **Задача 16.** У Ивана-царевича есть два сосуда ёмкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится a л. живой воды, $0 < a < 1$. Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объём жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях a Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени.

Тема 9. Тожества, равенства и неравенства

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Докажите тождество
$$(ax + by + cz + du)^2 + (bx + cy + dz + au)^2 + (cx + dy + az + bu)^2 + (dx + ay + bz + cu)^2 = \\ = (dx + cy + bz + au)^2 + (cx + by + az + du)^2 + (bx + ay + dz + cu)^2 + (ax + dy + cz + bu)^2.$$
- **Задача 2.** В выражении $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким а) наибольшим; б) наименьшим может быть это число?
- **Задача 3.** Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d , что $a/b + c/d = 1$, $a/d + c/b = 2008$?
- **Задача 4.** Докажите, что можно найти такие 100 пар целых чисел так, что в десятичной записи каждого числа все цифры не меньше 6 и произведение чисел каждой пары тоже число, где все цифры не меньше 6.
- **Задача 5.** Имеется 1959 положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{1959}$, сумма которых равна 1. Рассматриваются всевозможные комбинации из 1000 чисел, причём комбинации считаются совпадающими, если они отличаются только порядком чисел. Для каждой комбинации рассматривается произведение входящих в неё чисел. Доказать, что сумма всех этих произведений меньше 1.
- **Задача 6.** Калькулятор выполняет пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Найдите формулу, по которой на этом калькуляторе можно определить наименьшее из двух произвольных чисел a и b .
- **Задача 7.** Для любых чисел a_1 и a_2 , удовлетворяющих условиям $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1$, можно найти такие числа b_1 и b_2 , что $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, b_1 + b_2 = 1, (5/4 - a_1)b_1 + 3(5/4 - a_2)b_2 > 1$. Доказать.

- **Задача 8.** Доказать, что если $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{10}$, то $1/6 (a_1 + \dots + a_6) \leq 1/10 (a_1 + \dots + a_{10})$.
- **Задача 9.** По кругу записаны 100 целых чисел. Каждое из чисел больше суммы двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди записанных?
- **Задача 10.** Имеется несколько камней, масса каждого из которых не превосходит 2 кг, а общая масса равна 100 кг. Из них выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число d . Какое максимальное значение может принимать число d для всевозможных наборов камней?
- **Задача 11.** Дана невозрастающая последовательность чисел $\frac{1}{2} k = a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots > 0$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = 1$. Доказать, что найдутся k чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.
- **Задача 12.** Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, \dots, a_n, \dots$. Она периодична с периодом 100, то есть $a_1 = a_{101}, a_2 = a_{102}, \dots$. Известно, что $a_1 \geq 0$, $a_1 + a_2 \leq 0$, $a_1 + a_2 + a_3 \geq 0$ и вообще, сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ неотрицательна при нечётном n и неположительна при чётном n . Доказать, что $|a_{99}| \geq |a_{100}|$.
- **Задача 13.** В числовом наборе n чисел, причём одно из чисел равно 0, а другое равно 1.
а) Какова наименьшая возможная дисперсия такого набора чисел? б) Каким для этого должен быть набор?
- **Задача 14.** По кругу расставлено не менее четырёх неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $\frac{1}{4}$.
- **Задача 15.** а) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа. Докажите, что квадрат суммы этих чисел не меньше учетверённой суммы произведений $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5$ и x_5x_1 .
б) При каком наибольшем c_n для любых неотрицательных $x_1, \dots, x_n$ верно неравенство $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq c_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1)$ (в правой части n слагаемых)?
- **Задача 16.** Даны два набора из n вещественных чисел: $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$. Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий: а) из $a_i < a_j$ следует, что $b_i \leq b_j$; б) из $a_i < a < a_j$, где $a = 1/n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, следует, что $b_i \leq b_j$, то верно неравенство $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$.

Тема 10. Уравнения и системы уравнений

Примеры задач, используемых на практических занятиях:

- **Задача 1.** Среди всех решений системы:

$$x^2 + y^2 = 4,$$

$$z^2 + t^2 = 9,$$

$$xt + yz = 6$$
выберите те, для которых величина $x + z$ принимает наибольшее значение.
- **Задача 2.** Может ли система линейных уравнений с действительными коэффициентами иметь в точности два различных решения?
- **Задача 3.** Число a — корень уравнения $x^{11} + x^7 + x^3 = 1$. При каких натуральных значениях n выполняется равенство $a^4 + a^3 = a^n + 1$?
- **Задача 4.** При каких значениях x и y верно равенство $x^2 + (1 - y)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}$?
- **Задача 5.** Система уравнений второго порядка:

$$x^2 - y^2 = 0,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$
имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений системы уменьшается до трёх или до двух?
- **Задача 6.** Найти все действительные решения системы:

$$x^3 + y^3 = 1,$$

$$x^4 + y^4 = 1.$$

- **Задача 7.** Найдите все неотрицательные решения системы уравнений:
 $x^3 = 2y^2 - z$,
 $y^3 = 2z^2 - x$,
 $z^3 = 2x^2 - y$.
- **Задача 8.** Решить систему уравнений:
 $x^3 - y^3 = 26$,
 $x^2y - xy^2 = 6$.
- **Задача 9.** Решить систему уравнений:
 $3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = b^3$,
 $x + y + z = 2b$,
 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$.
- **Задача 10.** Решите уравнение $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + 2/5 = 0$.
- **Задача 11.** Решите систему:
 $y = 2x^2 - 1$,
 $z = 2y^2 - 1$,
 $x = 2z^2 - 1$.
- **Задача 12.** По кругу расставлено 300 положительных чисел. Могло ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме одного, равно разности своих соседей?
- **Задача 13.** Исследуйте, сколько решений имеет система уравнений:
 $x^2 + y^2 + xy = a$,
 $x^2 - y^2 = b$,
 где a и b – некоторые данные действительные числа.
- **Задача 14.** Найти решение системы:
 $x^4 + y^4 = 17$,
 $x + y = 3$.
- **Задача 15.** Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.
- **Задача 16.** Положительные числа a, b, c, x, y , таковы, что:
 $x^2 + xy + y^2 = a^2$,
 $y^2 + yz + z^2 = b^2$,
 $x^2 + xz + z^2 = c^2$.
 Выразите величину $xy + yz + xz$ через a, b и c .